

Feuille de TD n^0 4. Séries de Fourier sur $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Exercice 1 Montrer que la transformée de Fourier est un'application linéaire injective de $L^1(\mathbb{T})$ dans $C_0(\mathbb{Z})$.
Indications : Montrer d'abord que si $f \in C(\mathbb{T})$ et $\widehat{f}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $f = 0$ pp. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on considére la fonction $F(x) := \int_{-1/2}^{x} f(t)\, dt$.

Exercice 2 Soit A un sous-espace mesurable de $[0, 1]$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \cos(nx)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_A \sin(nx)\, dx = 0.$$

Exercice 3 Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikx}$ le noyau de Dirichlet d'ordre N et soit $S_N f(x) :== \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ la somme partielle N-ème de la série de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer :

(a) $S_N f = f * D_N$;

(b) $D_N(x) = \dfrac{\sin[(2N + 1)\pi x]}{\sin(\pi x)}$;

(c) $\int_{-1/2}^{0} D_N(x)\, dx = \int_0^{1/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T})$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x)\, dx\, .$$

Exercice 5 Soit φ la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{2} - x$ pour $x \in [0, 1[$.

(a) Étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier de φ.

(b) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que si les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(-k)e^{-2\pi ikx}$$

sont convergentes, alors la série de Fourier de f converge ponctuellement, mais que la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 6 Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(2\pi x)|$ et $g(x) = |\sin(2x)|$.

(a) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement et déterminer sa somme.

(b) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} g(x) \cos(2nx)\, dx = 0\, .$$

(c) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} g(x) |\sin(2nx)|\, dx\, .$$