Feuille de TD n^0 5. Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 (a) Calculer la transformée de Fourier de $f(x) := e^{-|x|}$.

(b) Déduire de (a) les transformées de Fourier de

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad h(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{et} \qquad k(x) := \frac{1}{1+(x-a)^2}\,,$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g(x) = e^{2\pi i x}$. Calculer $f * g$.

Exercice 3 Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Indications : Pour $m \in \mathbb{N}$ soit $T_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$T_m z = \begin{cases} z & \text{si } |z| \le m \\ m\dfrac{z}{|z|} & \text{sinon.} \end{cases}.$$

et soit χ_m la fonction indicatrice de $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le m\}$. Considérer pour $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ la fonction $f_m * \varphi_{[\varepsilon]}$ où $f_m = \chi_m \cdot (T_m \circ f)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait $\int \varphi = 1$.

Exercice 4 On pose $f(x) := e^{-\pi x^2}$. Calculer $f * f$.

Exercice 5 Le problème suivant étudie la trasformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ à partir de la théorie des fonctions d'Hermite sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in N_0$, la *n-ème fonction d'Hermite* est définie par

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\, e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-2\pi x^2}\right).$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $h_n' - 2\pi x h_n = -(n+1)h_{n+1}$.

(b) Montrer que $h_n(x) = e^{-\pi x^2} p_n(x)$, où $p_n(x)$ est un pôlynome de degré n. Calculer $p_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Indications : Preuve par induction sur n, en utilisant (a).

(c) Déduire de (b) que $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a

$$h_n' + 2\pi x h_n = 4\pi h_{n-1}\,,$$

où on pose $h_{-1} \equiv 0$.

Indications : Montrer d'abord que pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$4\pi x \frac{d^n f}{dx^n} - \frac{d^n}{dx^n}[4\pi x f] = -4\pi n \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\,.$$

(e) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ que

$$\widehat{h_n} = (-i)^n h_n \quad \text{et} \quad h_n^\vee = i^n h_n\,.$$

Indications : En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier pour la différentiation, montrer que $\widehat{h_n}$ et $(-i)^n h_n$ vérifient la même formule de recursion.

propre de K avec

$$Kh_n = -4\pi\big(n+1/2\big)h_n\,.$$

(g) Montrer que $\{h_n\}_{(n\in\mathbb{N}_0)}$ est un système orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$.

Indications : Montrer que $\langle Kh_n, h_m\rangle = \langle h_n, Kh_m\rangle$.

(h) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on pose $e_n := h_n/\|h_n\|_2$. Montrer que $\{e_n\}_{(n\in\mathbb{N}_0)}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Indications : Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de $fe^{-\pi x^2}$ peut être écrite dans la façon suivante :

$$\begin{aligned}\big[fe^{-\pi x^2}\big]^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i\xi}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\pi x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2\pi i\xi)^n\frac{x^n}{n!}\,dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\pi x^2}x^n\,dx\,.\end{aligned}$$

Justifier ce calcul. En supposant que $\langle f, h_n\rangle = 0$ pour tout n, déduire que $\big[fe^{-\pi x^2}\big]^\wedge = 0$ et donc $f = 0$.

(i) Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit $\widehat{f}$ par la *formule de Wiener* :

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, e_n\rangle(-i)^n e_n$$

(convergence dans le sens de $L^2(\mathbb{R})$). Montrer que $\wedge$ est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Donner une définition de $\vee$ telle que $f^{\wedge\vee} = f^{\vee\wedge} = f$.

(j) Vérifier que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ donnée dans (i) et la transformée définie à partir de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont coïncidents.

Indications : Remarquer que $\sum_{n=0}^{k}\langle f, e_n\rangle(-i)^n e_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.