Feuille de TD n^0 1. Les espaces L^p

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $0 < p < +\infty$. On définit

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

et on dit que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ lorsque $\|f\|_p < \infty$.

(a) Vérifier que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ pour les opérations usuelles :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x)\,, \qquad && f, g \in \mathcal{L}^p,\ x \in X \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x)\,, && \lambda \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{L}^p,\ x \in X\,. \end{aligned}$$

(b) Soit $0 < p < 1$. Montrer que $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \to [0, +\infty)$ ne satisfait pas l'inégalité triangulaire.

[*Indications :* Observer que si $a > 0$, $t > 0$ et $0 < p < 1$, alors $t^{p-1} > (a+t)^{p-1}$. En déduire que si $a > 0$, $b > 0$ et $0 < p < 1$, alors $a^p + b^p > (a+b)^p$.]

Exercice 2 (a) Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $0 < \lambda < 1$. Alors

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b\,. \tag{*}$$

[*Indications :* Si $b \neq 0$, diviser par b et étudier la fonction $f(t) = t^\lambda - \lambda t$.]

(b) **[Inégalité de Hölder pour** $p, q \in]1, +\infty[$ **]** Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

[*Indications :* I. Montrer d'abord que l'inégalité de Hölder est vérifiée si :

(i) $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$;

(ii) $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$.

II. Montrer qu'il suffit de vérifier l'inégalité si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

III. Appliquer l'inegalité (*) avec $a = |f(x)|^p$, $b = |g(x)|^q$ et $\lambda = 1/p$.]

(c) **[Inégalité de Hölder pour** $p = 1$ **et** $q = \infty$ **]** Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty\,.$$

Exercice 3 [Inégalité de Minkowski] Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

[*Indications pour* $p \in]1, +\infty[$ *:* Vérifier que $|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$ et appliquer l'inégalité de Hölder.]

Exercice 4 Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure et $0 < p < q \leq +\infty$. Montrer que, si $\mu(X) < \infty$, alors $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(X)^{1/p - 1/q}\,.$$