Université de Metz
Analyse de Fourier

Année universitaire 2003/2004

## Feuille de TD n$^0$ 2. Espaces de Hilbert.

**Exercice 1** Vérifier que l'espace $C([-1,1])$ des fonctions continues $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

est un espace préhilbertien qui n'est pas complet.

*Indications :* On considère la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -1/n] \\ nx & \text{si } x \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

**Exercice 2** Vérifier que les espaces $L^p([0,1], dx)$ (où $dx$ est la mesure de Lebesgue) muni de la norme $\|\cdot\|_p$ ne sont pas des espaces préhilbertiens pour $p \neq 2$.

[*Indication :* On considère l'identité du parallelogramme et les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = 1-x$.]

**Exercice 3** (a) Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer l'*identité de la polarisation* : Pour tout $x, y \in H$ on a

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big) \qquad (*)$$

(b) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On suppose que la norme $\|\cdot\|$ satisfait l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in V$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Montrer que (**??**) définit un produit scalaire sur $V$.

**Exercice 4** Soient $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $(H', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ espaces de Hilbert. Un *isomorphisme* est une bijection linéaire $\varphi : H \to H'$ qui préserve le produit scalaire : pour tout $x, y \in H$

$$\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle' = \langle x, y\rangle.$$

Pour tout $x \in H$ et $u \in H'$ on pose $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ et $\|u\|' := \sqrt{\langle u, u\rangle'}$. Une *isométrie* est une application linéaire $\psi : H \to H'$ qui préserve les normes associées : pour tout $x \in H$

$$\|\psi(x)\|' = \|x\|.$$

Montrer que une application linéaire $\varphi : H \to H'$ est un isomorphisme si et seulement si elle est une isométrie bijective.

**Exercice 5** (a) Montrer que si $f \in L^2([-1,1], dx)$ est orthogonale à tout élément de $C([-1,1])$, alors elle est orthogonale à toutes les fonctions indicatrices d'intervalles.

(b) Déduire de (a) que la mesure $d\mu = f(x)dx$ est nulle, donc que $f = 0$.

(c) Déduire de (a) et (b) que $C([-1,1])$ est dense en $L^1([-1,1]; dx)$.