**Feuille de TD n$^0$ 3. Séries de Fourier.**

**Exercice 1** Le but de cet exercice est de donner une preuve directe du fait que toute fonction continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires finies des fonctions $\{e_k\}_{(k\in\mathbb{Z})}$, où $e_k(x) := e^{2i\pi kx}$. Pour cela nous utilisons les fonctions $\{Q_k\}_{(k\in\mathbb{Z})}$ données par

$$Q_k(x) := a_k\Big(\frac{1+\cos(2\pi x)}{2}\Big)^k, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

où $a_k \in \mathbb{R}$ est choisit de façon que

$$\int_0^1 Q_k(x)\,dx = 1. \qquad (*)$$

(a) Montrer que $Q_k$ est une combinaison linéaire finie des fonctions $\{e_h\}_{(h\in\mathbb{Z})}$.

(b) Montrer que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1\Big(\frac{1+\cos(2\pi x)}{2}\Big)^k dx = 0\,.$$

En déduire que $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$.

(c) Montrer que $a_k < \pi(k+1)/2$.
*Indications :* Utiliser (*) et la propriété que $\sin(2\pi x) < 1$ pour $x \in [0,1/2]\setminus\{1/4\}$.

(d) Montrer que $Q_k$ est décroissante sur $[0,1/2]$. En déduir que pour tout $\delta\in(0,1/2)$ et tout $x\in[\delta,1/2]$ on a

$$Q_k(x) \le \frac{\pi(k+1)}{2}\Big(\frac{1+\cos(2\pi\delta)}{2}\Big)^k$$

et donc que $\lim_{k\to\infty} Q_k(x) = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(e) Soit $f : \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ continue et posons

$$P_k(x) := (f * Q_k)(x) := \int_0^1 f(x-t)Q_k(t)\,dt\,.$$

Montrer que $\int_0^1 f(x-t)Q_k(t)\,dt = \int_0^1 Q_k(x-t)f(t)\,dt$. En déduir que $P_k$ est une combinaison linéaire finie des fonctions $\{e_h\}_{(h\in\mathbb{Z})}$.

(f) En utilisant que $f$ est uniformément continue, montrer que la suite $\{P_k\}_{(k\in\mathbb{Z})}$ converge uniformément vers $f$.

**Exercice 2** (a) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique $f$ définie sur $[-1/2,1/2)$ par $f(x) = e^{2\pi izx}$, où $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ est donné.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Déterminer la somme de la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2}$.

**Exercice 3** (a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

(b) Déduire de (a) les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = |\cos(2\pi x)|$.

(c) Déterminer la somme des séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}$

**Exercice 4** (a) Soit $T > 0$ donné. A partir de la base orthonormé $\{e_k\}_{(k\in\mathbb{Z})}$ de $L^2(\mathbb{T})$, construire une base orthonormé $\{e_{T,k}\}_{(k\in\mathbb{Z})}$ de l'espace $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ des fonctions (pp définies) mesurables par rapport à la mesure de Lebesgue et $T$-périodiques $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})} := \Big(\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\,\frac{dx}{T}\Big)^{1/2} < +\infty\,.$$

(b) Montrer que $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})\subset L^2(\mathbb{R}/2T\mathbb{Z})$.

(c) Soit $f\in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ avec coefficients de Fourier $\widehat{f}_T(k)$ relativement à $\{e_{T,k}\}_{(k\in\mathbb{Z})}$. Soient $\widehat{f}_{2T}(k)$ les coefficients de Fourier de $f$ relativement à $\{e_{2T,k}\}_{(k\in\mathbb{Z})}$. Quelle relation existe-t-il entre les coefficients $\widehat{f}_T(k)$ et $\widehat{f}_{2T}(k)$ ?

(d) Ecrire les séries de Fourier de $f$ relativement aux deux bases et vérifier qu'elles sont identiques.

**Exercice 5** Déterminer la série de Fourier da la fonction 1-périodique $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1/2 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \end{cases}$$

Quel doit être la valeur de $f$ en $x = 0$ si on veut que la série de Fourier de $f$ converge en 0 vers $f(0)$ ?