Feuille de TD n^0 2. Suites et séries

Exercice 1 (Manipulation du symbole $\sum$) Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $S_n = n(n+1)$. Déterminer :

1) S_2 ;
2) $\sum_{k=3}^{5} a_k$;
3) $\sum_{k=3}^{n} a_k$;
4) $\sum_{k=0}^{2n} 2a_k$.

(b) Vrai ou faux ? Justifier votre reponse.

1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - 1) = \sum_{k=1}^{n} a_k - 1$;
2) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$;
3) $r\sum_{k=1}^{n}(a_k + 1) - (r-1)\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + r)$, où r est un nombre réel fixé.

(c) Soit $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Evaluer $\sum_{j=1}^{3}\left(a_j \sum_{k=1}^{j} a_k\right)$.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, évaluer les 15 premières termes de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et faire une hypothèse sur sa limite. Ensuite, déterminer mathématiquement la limite.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$.

Exercice 3 Soit $\{r^n\}$ la suite géométrique de raison r. Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1\,, \\ 1 & \text{si } r = 1\,, \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1\,. \end{cases}$$

Exercice 4 Pour certaines espèces d'insectes évoluant par cycle de reproduction annuel, l'évolution générale est caractérisée par une suite $\{a_n\}$ des nombres d'individus adultes à chaque génération. Une hypothèse simple d'évolution est que le nombre d'insectes à un instant donné ne dépend que du nombre d'insectes à la génération précédente. Le suite soit donnée par récurrence par

$$a_{n+1} = Ca_n\left(1 - \frac{a_n}{L}\right), \tag{1}$$

où $C > 0$ est un coefficient de reproduction et L le nombre maximum d'insectes pouvant vivre dans la milieu étudié. On peut montrer que la valeur de a_n est positive et reste inférieure à L si $0 < C < 4$. On suppose que $L = 1000$ et que la population initiale est $a_0 = 330$.

(a) Calculer les valeurs de a_n pour n de 1 à 16 si $C = 0{,}8$ ou $C = 2{,}6$ (dans les listes remplacer a_n par l'entier le plus proche).

(b) Montrer que les seules limites possibles de la suite $\{a_n\}$ sont $a = 0$ ou $a = L(1 - 1/C)$.
Indication : Prendre la limite des deux membres de (1) et résoudre l'équation en a obtenue.

(c) On suppose que le coefficient de reproduction est faible, c'est-à-dire $C < 1$. Montrer que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et que sa limite est 0 (il y a extinction de la population).

Référence : [B2], page 249.

Exercice 5 Expliciter les sommes partielles S_n de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.
Indication : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Exercice 6 Déterminer la nature de la série de terme général :

(a) $a_n := \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$;

(b) $a_n := \dfrac{n^n}{n!}$ où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$;

(c) $a_n := (-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}$.