Université de Metz — Année universitaire 2003/2004
Outils mathématiques SV1

**Feuille de TD n$^0$ 3. Fonctions**

**Exercice 1** (a) En utilisant le graphe de la fonction $y = \sin x$, tracer celui des fonctions suivants :

1) $y = 2 + \sin x$ ;
2) $y = \sin(4x)$ ;
3) $y = \sin(8 + x)$ ;
4) $y = 3 \sin x$ .

(b) Interpréter graphiquement les constantes $A$, $B$, $C$ et $t_0$ dans le graphe de la fonction

$$y = A \sin\big(B(t - t_0)\big) + C\,.$$

(c) Dans un modèle prédateur-proie les effectifs de hiboux et de souris croissent selon une courbe sinusoïdale : par exemple, si $P(t)$ est le nombre de prédateurs à un moment $t$ (mesuré en jours), alors $P(t) = A \sin\big(B(t - t_0)\big) + C$ pour des certaines valeures de $A$, $B$, $C$ et $t_0$ .
En 2001, la population de hiboux la moins nombreuse a été établie à 7000 le 15 janvier, et la population la plus nombreuse suivante a été établie à 13000 le 15 juillet. Ecrire l'équation représentant $P(t)$.

**Exercice 2** Etudier la parité de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

**Exercice 3** (a) Déterminer le domaine de définition des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}\,.$$

(b) Utiliser le graphe du trinôme du second degré pour tracer les graphes de $f$ et $g$.

**Exercice 4** Une *enzyme* est une substance qui agit dans une réaction chimique comme un catalyseur. La vitesse de réaction $v$ dépend cependent de la concentration de l'enzyme. Pour une réaction où une substance $S$ donne le produit $P$ sous l'effet de l'enzyme $E$, l'enzyme n'apparaît pas dans les deux membres de l'équation de la réaction qu'on note

$$S \xrightarrow{E} P\,.$$

Pour beaucoup d'enzymes, l'hyphothèse de base est donnée par l'équation de Michaelis-Menten

$$v = V_{\max} \frac{[S]}{[S] + K}\,,$$

où $V_{\max}$ est la vitesse maximum possible et $K$ la *constante de Michaelis-Menten*, qui est la concentration pour laquelle $v = V_{\max}/2$.

(a) Tracer le graphe de $v$ en fonction de $[S]$ selon l'équation de Michaelis-Menten.
(b) Ecrire $1/v$ en fonction de $1/[S]$ (représentation de Lineweaver-Burk) et tracer le graphe.

*Référence :* [B2], page 256.

**Exercice 5** La modélisation des épidémies consiste à proposer une relation mathématique pour rendre compte de l'évolution d'une épidémie. Dans un modèle simplifié, le nombre $M$ d'individus malades est lié au nombre $S$ d'individus sains (non encore atteints) par la relation

$$M = -S + \frac{g + m}{c} \ln S + K\,,$$

où $g$ est le taux de guérison, $m$ le taux de mortalité, $c$ le taux de contagion et $K$ est une constante.

Tracer le graphe de $f$ en supposant que $\dfrac{g + m}{c} = 1$ et $K = 101$.

*Référence :* [B2], page 254.

**Exercice 6** La loi d'Arrhenius est une relation proposée en 1889 par Svante Arrhenius pour rendre compte de la variation du coefficient de vitesse $k$ d'une réaction chimique avec la température $T$. Il s'agit d'une relation empirique qui se trouve être vérifiée pour un très grand nombre de réactions mais qui n'est pas universelle. Elle est donnée par l'équation

$$k = A\, e^{-E_a/(RT)}$$

où $E_a$ est l'énergie d'activation de la réaction (qui représente la barrière d'énergie que les réactifs doivent franchir pour que la réaction puisse se dérouter), $A$ est le facteur préexponentiel, $R$ est la constante des gaz parfaits ($8,314\ J \cdot K \cdot \mathrm{mol}^{-1}$) et $T$ est la température en Kelvin. Comme $E_a \geq 0$, alors $k$ augmente avec la température $T$.

L'étude cinétique d'une réaction a fourni la valeur $\frac{E_a}{R} = 10\ K$. Tracer le graphe de $k$ comme fonction de $T$ en supposant que $A = 10^{11}\ L \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot s$.

*Référence :* Lexique de cinétique chimique, http ://ead.univ-orleans.fr/SCIENCES/chimie/cinet/index.htm

**Exercice 7** Les atomes d'une substance radioactive se décomposent en émettant un rayonnement radioactif. On désigne par le terme *demi-vie* le temps au cours duquel la quantité de ces atomes radioactives diminue de moitié.

La demi-vie du strontium-90 est de 25 ans. On suppose qu'un laboratoire achéte un échantillon de 24 mg de strontium-90.

(a) Vérifier que la quantité $M(t)$ de strontium-90 après $t$ ans est donnée par

$$M(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}\ \mathrm{mg}.$$

(b) Combien restera-t-il de strontium-90 après 40 ans ?

(c) Combien de temps faudra-t-il avant qu'il n'en reste plus que 1 mg ?

(d) Tracer le graphe de la fonction $M(t)$.

*Référence :* [S], page 61.

**Exercice 8** L'activité d'une enzyme (par exemple la $b$-galactosidase) est fortementnfluencée par le pH du milieu réactionnel (d'où l'utilisation de milieux tamponnés pour mesurer des activités catalytiques). C'est au *pH optimum* que la vitesse de réaction est la plus grande ; aux pH d'arrêt l'activité est nulle. Les variations de pH peuvent modifier la conformation de la protéine soit en la dénaturant (pH extrêmes) soit en induisant des changements réversibles (faibles variations autour du pH optimum).

On note $v$ la vitesse d'une réaction catalysée par la $b$-galactosidase, exprimée en unités enzymatique. On admet alors la relation suivante :

$$v = \frac{1}{1 + 0,1(\mathrm{pH} - 7,5) + 0,1(\mathrm{pH} - 7,5)^2}.$$

Tracer le graphe de v en fonction du pH et déterminer la valeur du pH optimum.

*Référence :* http ://nte-serveur.univ-lyon1.fr/nte/mathsv/cours/analyse/cours.html

**Exercice 9** Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

et tracer son graphe.