Feuille de TD n^0 4. Fonctions exponentielles, logarithmes et puissance

Exercice 1 Les coordonnées semi-logarithmiques et logarithmiques permettent de représenter par des droites les fonctions exponentielles et les fonctions puissances.

En *coordonnées semi-logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(x, \ln y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = x, \qquad Y = \ln y$$

En *coordonnées logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(\log x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = \log x, \qquad Y = \log y$$

(a) Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = 5e^{3x}$ en coordonnées semi-logarithmiques.

(b) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = Ce^{ax}$ en coordonnées semi-logarithmiques. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

(c) Tracer le graphe de la fonction puissance $y = 4x^{\sqrt{2}}$ en coordonnées logarithmiques.

(d) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction puissance $y = Cx^a$ en coordonnées logarithmiques. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

Exercice 2 Pour effectuer des mesures électriques en biologie ou en médecine, on utilise souvent des électrodes en contact avec un tissu biologique. Dans certains cas, le système électrodes-tissu se comporte comme une capacité et une résistance en parallèle; les valeurs de la capacité C et de la résistance R dépendent de la fréquence F du courant travensant les électrodes.

L'étalonnage d'une sonde formée d'une paire d'électrodes parcourue par un courant d'intensité fixe a donné les résultats suivants (F en hertz, C en microfarads, R en ohms) :

F	30	50	100	200	300	500	1000	2000	3000	5000	10000
C	4,32	3,31	2,86	1,75	1,38	1,00	0,68	0,47	0,37	0,28	0,25
R	1180	1010	690	540	450	350	240	160	130	95	58

(a) Représenter graphiquement C et R en fonction de F en coordonnées cartésiennes et en coordonnées logarithmiques.

(b) On constate sur les graphiques en coordonnées logarithmiques que les points sont presque alignés. Déterminer les droites d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés et les répresenter sur les graphiques obtenus à la question (a).

(c) Donner des relations approchées reliant C et R comme fonction de F.

Référence : [B2], page 223.

Exercice 3 On a bagué 130 jeunes rouges-gorges au mois d'avril de l'année 1999. Par la suite, chaque année au mois d'avril, on a compté les rouges-gorges bagués encore vivants. On a obtenu les résultats suivants :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Nombre vivants	130	45	18	7	3

(a) Représenter graphiquement le nombre de rouges-gorges vivants en fonction de l'année de observation après baguage en coordonnées cartésiennes et en coordonnées semi-logarithmiques.

(b) On constate sur les graphiques en coordonnées semi-logarithmiques que les points sont presque alignés. Déterminer les droites d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés et les répresenter sur les graphiques obtenus à la question (a).

(c) Que peut-on conclure sur la survie des rouges-gorges ?

Exercice 4 Le nom Bacillus thuringiensis (Bt) a été introduit en 1911 par le biologiste allemand E. Berliner, pour décrire la bactérie pathogène trouvée dans des larves d'insectes familiers des silos à grains en Thuringe. Cette bactérie avait déjà été identifiée en 1901 par le japonais S. Ishiwata comme étant l'agent responsable d'une maladie touchant les élevages de vers à soie (Bombyx mori). La première phase du cycle de croissance de Bt est une phase végétative pendant laquelle des cellules se multiplient par scission de façon exponentielle : le nombre de bactéries au temps t (en minutes) est donné par la loi exponentielle $y(t) = Ce^{Kt}$, où C et K sont des constantes.

Expérimentalement on détermine que le population au temps $t = 10$ min est 15000 et au temps $t = 30$ min est 20000.

(a) Quelle était la population initiale ?

(b) Quel serait le nombre de bactéries au temps $t = 60$?

(c) Déterminer une équation differentielle vérifiée par la fonction $y(t)$.

Références : http ://www.inapg.inra.fr/ens_rech/bio/biotech/textes/applicat/acapplic.htm et http ://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/

Exercice 5 Le biologiste R. Pearl a étudié une population de *drosophiles* (mouches) se reproduisant assez rapidement (cycle d'ordre de 10 à 12 jours). Dans une bouteille dont le fond contient une quantité suffisante de nourriture, il a introduit 22 mouches d'âge varié, et il a noté chaque jour le nombre N de mouches. Les résultats ont été les suivants (t est le nombre de jours écoulés depuis le début de l'expérience) :

t	0	9	12	18	21	25	29	33	36	39
N	22	39	105	225	390	499	618	791	877	938

On veut exprimer la relation entre t et N par une fonction logistique

$$N(t) = \frac{M}{1 + Ke^{-\lambda t}}$$

avec $\lambda > 0$ et $K > 0$.

(a) Représenter graphiquement les données.

La représentation graphique permet une estimation de la constante M ; pour la suite, on prendra $M = 1035$.

(b) Exprimer la quantité $Y = \ln\left(\frac{M-N}{N}\right)$ en fonction de t.

(c) Donner une estimation des constantes K et λ en utilisant la méthode des moindres carrés.

(d) Tracer le graphe de la fonction logistique obtenue sur le graphique à la question (a).

Référence : [B2], page 226.

Exercice 6 (a) Vérifier que la fonction

$$N(t) = N^* e^{Ce^{-\gamma t}}$$

est une solution de l'équation différentielle de Gompertz

$$N'(t) = \gamma\big(\ln N^* - \ln N(t)\big)N(t)\,.$$

(b) Etudier $N(t)$ comme fonction de $t \in [0, +\infty[$ en supposant que $\gamma < 0$ et $C = -1$ (extinction de la population).

(c) Donner une interpretation des constants N^* et γ.