Feuille de TD n^0 5. Exercices de révision

Exercice 1 Le nombre de cellules compté dans 30 cultures différentes est reporté dans la série suivante :

25 - 45 - 238 - 194 -16 - 23 - 30 - 16 - 22 -123 - 51 - 398 - 162 - 14 - 72 -
35 -30- 91 - 45 - 33 - 22 - 51 - 25 -16 - 30 - 30 - 391 - 194 -30 - 91

(a) Donner les tableaux des effectifs, des fréquences, des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.

(b) Donner le tableau récapitulatif avec les groupements par classes

$$[10,40[, [40,80[, [80,120[, [120,160[, [160,200[, [200,240[, [240,280[, [280,320[, [320,360[, [360,400] .$$

(c) Tracer les histogrammes des effectifs et des fréquences.

(d) Calculer les paramètres de position (mode, moyenne, médiane, 1er et 3ème quartiles) et de dispersion (étendue, étendue interquartile, variance, écart-type).

(e) On rappelle que le centre d'une classe $I = [a,b[$ (ou $[a,b]$) est $X := (a+b)/2$. Soient $I_1, \ldots, I_N$ les classes dans (b). Pour tout k on indique par X_k le centre de la classe I_k et par N_k son effectif. Calculer approximativement la moyenne et la variance de l'échantillon consideré par les formules

$$\overline{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} N_k X_k , \qquad v_x \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} N_k (X_k - \overline{x})^2 .$$

Comparer les résultats avec celui de (d).

Exercice 2 La suite de Fibonacci $\{f_n\}$ fut introduite (en 1200) par Leonardo de Pisa, plus connu sous le nom de Fibonacci, pour décrire la croissance d'une population de lapins. Le terme f_n de la suite donne le nombre de couples de lapins au bout de n mois, dans une population (idéale) de lapins, si on suppose que :

(1) le premier mois, il y a juste un couple de lapereaux,

(2) des lapereaux ne peuvent être productifs qu'à partir du deuxième mois,

(3) chaque mois, chaque couple de lapin engendre un nouveau couple,

(4) les lapins ne meurent jamais.

La suite est donc définie par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 3$

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} ,$$

et

$$f_1 := 1 \qquad \text{et} \qquad f_2 := 1 .$$

(a) Déterminer les premiers 15 nombres dans la suite de Fibonacci.

(b) Déterminer $\lim_{n \to \infty} f_n$.

(c) Vérifier pour $n \geq 2$ la relation

$$\frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1} f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} .$$

(d) Montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1 .$$

Pout tout $n \geq 1$ soit $a_n := f_{n+1}/f_n$.

(e) Vérifier que $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$.

(f) En supposant que $\{a_n\}$ converge, déterminer sa limite.

Exercice 3 La dissociation d'un acide faible HA dans un ion hydrogène H^+ et une base conjuguée A^- est liée au pH par l'équation d'Henderson-Hasselbach

$$pH = pK + \log\left(\frac{1}{d} - 1\right),$$

où d est le degré de dissociation de l'acide faible et pK est la valeur du pH lorsque le nombre de molécules de l'acide faible et celui de la base conjuguée sont égaux, càd la valeur du pH pour $d = 1/2$.

(a) Déterminer l'intervalle $[a, b]$ pour la variable d tel que les valeurs correspondantes du pH soient dans l'intervalle $[0, 14]$. Vérfier que $1/2 \in [a, b]$ si et seulement si $pK \in [0, 14]$.

(b) Etudier la fonction pH comme fonction de $d \in [a, b]$ en supposant que $pK \in [0, 14]$.

Référence : http ://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/webmodules/phbuffers.html

Exercice 4 Le modèle de croissance le plus souvent utilisé pour les animaux aquatiques (à respiration branchiale) est celui de von Bertalanffy. Selon ce modèle, le poids $y(t)$ d'un animal aquatique est lié au temps t (compté à partir de la naissance de l'animal) par la relation

$$y(t) = A(1 - e^{-Kt})^3,$$

où A est une constante (avec la même unité que $y(t)$) et K est une constante qui donne le taux de croissance.

(a) Etudier y comme fonction de $t \in [0, +\infty[$.

(b) Donner une interpretation de la constante A.

(c) On suppose que t est mesuré en mois et y en kilogrammes. Dans combien de mois un animal atteint-il le poids $0,729A$ si $K = 1$?

Exercice 5 Pour une certaine mouche (lucilla cuprina), le biologiste L.G. Weber a étudié la relation entre le poids P de la pupe (en mg) et le nombre N d'ovarioles pour des femelles. Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

P	6,30	7,91	8,20	8,25	8,65	9,48	16,08	18,15	21,7	23,12	24,88	26,20	28,82	32,0
N	62	76	81	80	83	105	142	152	184	186	182	230	193	260

(a) Représenter graphiquement la distribution des valeurs de ces deux variables.

(b) On note respectivement P_k et N_k les k-ièmes données dans les échantillons des valeurs de P et de N du tableau. Déterminer la moyenne, la variance et écart-type pour l'échatillon des P et pour l'échatillon des N en sachant que :

$$\sum_{k=1}^{14} P_k = 239,74 \qquad \sum_{k=1}^{14} N_k = 2016 \qquad \sum_{k=1}^{14} P_k^2 = 5155,71 \qquad \sum_{k=1}^{14} N_k^2 = 343088.$$

(c) Déterminer la covariance des variables P et N dans les échantillons donnés en sachant que $\sum_{k=1}^{14} P_k N_k = 41801,01$.

(d) On suppose que les variables N et P sont liées approximativement par une relation affine $N = aP+b$. Evaluer a et b par la méthode des moindres carrés.

(e) On considerère la variable résiduelle $R = N - aP - b$. Calculer sa moyenne et son écart-type.

Référence : [B2], p.227

Exercice 6 Pendant la croissance d'un être vivant, les caractéristiques des différents organes, par exemple la taille et le poids, croissent à des vitesses différentes. Pour des filles, entre 1 et 17 ans, la taille moyenne T (en centimètres) et le poids moyen P (en kilogrammes) sont donnés par le tableau suivant :

âge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
P	9,2	11,6	13,6	15,3	17,2	19,0	22,3	23,8	26,7	29,7	33,0	37,0	45,0	50,3	53,0	54,1	54,6
T	72,5	84,2	92,8	99,7	106,4	112,4	118,2	123,9	129,4	134,8	140,1	147,4	154,4	157,8	159,2	159,6	159,7

(a) Représenter graphiquement P et T en coordonnées logarithmiques.

(b) Donner une estimation des constantes a et b tels que $T = aP^b$ en utilisant la méthodes des moindres carrés.

Référence : [B2], p.227