Université de Metz — Année universitaire 2003/2004

Outils mathématiques SV1

Examen blanc du 18 décembre 2003

Durée 2h. Les calculatrices sont autorisées. Le seul document autorisé est un formulaire manuscrit format A4 recto-verso. Les exercices sont indépendants. Résoudre les trois exercices **sur feuilles séparées**. *Justifier les réponses données. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.*

Exercice 1.

Un modèle discret pour la mitose en présence d'un facteur inhibiteur est donné par une suite $\{P_n\}$ dans laquelle le nombre P_{n+1} de cellules à la $(n+1)$-ième génération est lié au nombre P_n de cellules à la n-ième génération par la relation

$$P_{n+1} = \frac{2P_n}{1+(aP_n)^b},$$

où a et b sont des constantes telles que $0 < a < 1$ et $b > 0$. On suppose que le nombre initial de cellules P_0 est positif : $P_0 > 0$. On peut alors montrer que $P_n > 0$ pour tout n.

(a) [**3 pts**] Vérifier que la suite $\{P_n\}$ est croissante si et seulement si $P_n \leq 1/a$ pour tout n.

On suppose que $\{P_n\}$ est croissante. D'après (a) la suite $\{P_n\}$ est aussi bornée, donc convergente. Soit $P = \lim_{n\to\infty} P_n$.

(b) [**1 pt**] Montrer que $P > 0$.

(c) [**2 pts**] Déterminer la valeur de P.

Exercice 2.

Lorsqu'un médicament est injecté dans le sang, sa concentration y (en mg/litre) après t minutes est donnée par

$$y(t) = te^{-Ct}$$

où C est une constante positive qui dépend de la quantité de médicament injectée. Etudier $y(t)$ comme fonction de $t \in [0, +\infty[$ en déterminant :

(a) [**1 pt**] Les limites (ou les valeurs) de $y(t)$ aux bornes de l'intervalle de définition.

(b) [**1/2 pt**] Les asymptotes eventuelles.

(c) [**1/2 pt**] Les valeurs de t pour lesquelles $y(t) > 0$ et ceux pour lesquelles $y(t) = 0$.

(d) [**2 pts**] La dérivée de y. En déduire la croissance/décroissance et les extrema eventuels de y.

(e) [**1 pt**] Le tableau de variation de y.

(f) [**2 pts**] La dérivée seconde de y. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion eventuels de y.

(g) [**1 pt**] Tracer le graphe de y.

Exercice 3.

La masse M des feuilles d'un arbre est liée au diamètre à la base D de son tronc par une relation de la forme $M = \alpha D^\beta$, où α et β sont des constantes. Les mesures de la masse M des feuilles (en g) et du diamètre à la base D (en cm) effectuées sur un échantillon de 13 hêtres à grandes feuilles (Fagus grandifolia) sont réportées en coordinnées logarithmiques dans le tableau suivant :

$X = \log D$	0,70	1,37	1,07	1,22	0,62	0,75	0,58	1,00	0,63	0,81	1,34	1,25	1,41
$Y = \log M$	2,53	3,75	3,23	3,50	2,40	2,62	2,30	3,09	2,41	2,75	3,70	3,54	3,81

(a) [**1 pt**] Déterminer la médiane et l'étendue pour la variable D dans l'échantillon consideré.

(b) [**1 pt**] On peut vérifier que les moyennes de $\log D$ et $\log M$ dans l'échantillon sont

$$\overline{X} := \text{ moyenne de } \log D = 0{,}98 \qquad \text{et} \qquad \overline{Y} := \text{moyenne de } \log M = 3{,}05\,.$$

Peut-on déduire que les moyennes de D et de M sont respectivement $10^{0,98}$ et $10^{3,05}$? Justifier votre réponse.

(c) [**1 pt**] On note respectivement X_k et Y_k les k-ièmes données dans les échantillons des valeurs de $\log D$ et de $\log M$ dans le tableau. Déterminer la variance de la variable $\log D$ et la covariance de $\log D$ et de $\log M$ pour l'échantillon donné en sachant que

$$\sum_{k=1}^{13} X_k^2 = 13{,}68 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{13} X_k Y_k = 41{,}01\,.$$

(d) [**1 pt**] Déterminer au moyen de la méthode des moindres carrés la droite de regression $Y = aX + b$ pour les données du tableau.

(e) [**1 pt**] Donner une estimation les constantes α et β de la relation $M = \alpha D^\beta$ à partir de l'échantillon consideré.

(f) [**1 pt**] En utilisant la loi approchée déterminée dans (e), déduire la masse des feuilles d'un hêtre à grandes feuilles dont le diamètre à la base est de 20 cm.