

Feuille de TD n° 1

**Exercice 1** Lorsque plusieurs espèces animales vivent dans un même écosystème, elles entrent généralement en compétition pour leur alimentation. Lorsque deux animaux se disputent la même nourriture, le gagnant est celui qui réussit à s'approprier l'objet de convoitise. Supposons qu'un animal de l'espèce  $i$  l'emporte sur un animal de l'espèce  $j$  dans une proportion  $a_{i,j} = \frac{i}{i+j}$ .

- Construire une matrice de compétition,  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ , entre trois espèces animales d'un même écosystème.
- Quelle espèce cagne le plus souvent lorsqu'elle est en compétition avec les autres espèces ?
- Que vaut  $A + A^t$  ? Expliquer le résultat.

*Référence* : L. Amyotte, Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications, ERPI, page 223.

**Exercice 2** Un technicien doit administrer à un animal de laboratoire deux repas principaux par jour. Il dispose de trois produits  $P1$ ,  $P2$  et  $P3$ . La quantité (en grammes) de protéines et de matières grasses dans une portion de 30 g des trois produits est donnée dans le tableau suivant.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Produit} & \text{Protéines (\%)} & \text{Gras (\%)} \\ \hline P1 & 7 & 3 \\ \hline P2 & 10 & 5 \\ \hline P3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Chaque repas contient au total 30 g des trois produits, dans les proportions indiquées par la matrice  $B$ .

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Repas} & P1 & P2 & P3 \\ \hline \text{Repas 1} & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ \hline \text{Repas 2} & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

- Interpréter la valeur de  $a_{2,1}$  dans le contexte donné.
- Interpréter la valeur de  $b_{1,3}$  dans le contexte donné.
- Que représente la deuxième ligne de la matrice  $B$  ?
- Calculer le produit matriciel  $BA$  et l'interpréter dans le contexte donné.
- Calculer le produit matriciel  $AB$  et l'interpréter dans le contexte donné.

**Exercice 3** Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par pique d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ; - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ; - étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes : - au départ, il est immunisé, - au départ, il est non malade et non immunisé, - au départ, il est malade. Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ? (exercice proposé par le GEPS)

**Exercice 4** Pour produire une certaine substance chimique, il nous faut trois ingrédients différents A, B, et C. Les trois ingrédients doivent être dissous dans l'eau séparément avant qu'ils agissent l'un sur l'autre pour former la substance chimique. Supposons qu'une solution contenant A à 1,5 g/cm<sup>3</sup> combinée avec une solution contenant B à 3,6 g/cm<sup>3</sup> combinée avec une solution contenant C à 5,3 g/cm<sup>3</sup> donne 25,07 g du produit chimique. Si la proportion pour A, B, C dans ces solutions sont changées à 2,5, 4,3, et 2,4 g/cm<sup>3</sup>, respectivement (tandis que les volumes demeurent les mêmes), alors 22,36 g du produit chimique

sont produits. Finalement, si les proportions sont changées à 2,7, 5,5, et 3,2 g/cm<sup>3</sup>, respectivement, alors 28,14 g du produit chimique sont produits. Quels sont les volumes (en centimètres cubiques) des solutions contenant A, B, et C ?

**Exercice 5** Une cellule vivante eucaryote est composée de dizaines de milliers de types de molécules (ADN, ARN, protéines, lipides) qui interagissent entre elles physiquement et/ou chimiquement. On peut représenter l'ensemble de ces interactions sous la forme d'un graphe orienté dont les sommets représentent les molécules et les arêtes représentent les interactions entre ces molécules. Il y a interaction moléculaire entre le gène A et le gène B si le gène A (ou son ARNm ou son produit) interagit directement au niveau moléculaire avec le gène B (ou son ARNm ou son produit). Il existe un contact physique entre les macromolécules. La majorité des interactions décrites sont de trois types : Protéine - ADN ; Protéine - ARN et Protéine - protéine. Les interactions peuvent être orientées (Protéine - ADN ; Protéine - ARN) ou non orientées (Protéine - protéine). Interactions et réseaux. Un ensemble d'interactions forme un réseau d'interactions. Un réseau peut illustrer les relations fonctionnelles existant entre gènes/protéines. Un réseau peut être représenté par un graphe orienté ou non. Interaction directe :  $A \rightarrow B$  Interactions indirectes :  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$

- (a)
- (b)
- (c)

**Exercice 6** (a)

*Références* : [http://www.inapg.inra.fr/ens\\_rech/bio/biotech/textes/applicat/acapplic.htm](http://www.inapg.inra.fr/ens_rech/bio/biotech/textes/applicat/acapplic.htm) et <http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/>

**Exercice 7** (a)

*Référence* : [B2], page 226.

**Exercice 8** (a)