Université de Metz Année universitaire 2004/2005
Analyse de Fourier

Feuille de TD n^0 2. Espaces de Hilbert.

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure. On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{M}$ tels que $0 < \mu(A) < +\infty$, $0 < \mu(B) < +\infty$ ainsi que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que l'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ muni de la norme $\| \cdot \|_p$ n'est pas un espace préhilbertien pour $p \neq 2$.

[*Indication :* Utiliser l'identité du parallélogramme.]

Exercice 2 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $\{u_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux. On pose $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge dans H si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ espaces de Hilbert. Un *isomorphisme* est une bijection linéaire $\varphi : H \to H'$ qui préserve le produit scalaire : pour tout $x, y \in H$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle' = \langle x, y \rangle.$$

Pour tout $x \in H$ et $u \in H'$ on pose $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et $\|u\|' := \sqrt{\langle u, u \rangle'}$. Une *isométrie* est une application linéaire $\psi : H \to H'$ qui préserve les normes associées : pour tout $x \in H$

$$\|\psi(x)\|' = \|x\|.$$

Montrer que une isomérie est toujours injective et que une application linéaire $\varphi : H \to H'$ est un isomorphisme si et seulement si elle est une isométrie surjective (donc bijective).

Exercice 4 Un espace vectoriel normé est dit *séparable* s'il admet un sous-ensemble dense au plus dénombrable.

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert de dimension infinie. On veut montrer que H est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.

(a) Montrer que si F un sous-ensemble dense de H, alors $F^{\perp} = \{0\}$.

(b) Soit $F = \{f_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$. Construire par récurrence une famille $\{e_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$ telle que :

  (i) $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$ for all $n, m \in \mathbb{N}$;

  (ii) $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \ldots, e_n\}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la famille $\{e_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$ dans (b) est une base hilbertienne de H.

(d) Montrer que si H admet une base hilbertienne dénombrable, alors H est séparable.

Exercice 5 (Dans cet exercice on utilisera toujours la mesure de Lebesgue)

(a) Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $p \in [1, +\infty[$.

(b) Soit $(V, \| \cdot \|)$ un espace normé séparable de dimension infinie. Montrer que tout sous-espace de V est séparable.

(c) Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $L^p(E)$ est séparable.

(d) Déduire de ce qui précède que $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $L^2([0,1]^n)$ admettent des bases hilbertiennes dénombrables.