Feuille de TD n^0 3. Séries de Fourier.

Exercice 1 Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On dit que la fonction f est :
– *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$;
– *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que si f est paire alors on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{f}(k) = 2\int_0^{1/2} f(x)\cos(2\pi kx)\,dx \qquad \text{et} \qquad \widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)\,.$$

(b) Montrer que si f est impaire alors on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{f}(k) = -2i\int_0^{1/2} f(x)\sin(2\pi kx)\,dx \qquad \text{et} \qquad \widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)\,.$$

Exercice 2 Soit f la fonction 1-périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in \big[-1/2, 1/2\big[$.

(a) Calculer le coefficients de Fourier de f.

(b) Déduire de (a) que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Exercice 3 Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite de *classe C^1 par morceaux* sur le segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. Par extension, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et 1-périodique est dite de classe C^1 *par morceaux* si sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a + 1]$ est de classe C^1 par morceaux.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique, de classe C^1 par morceaux et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx\,,$$

avec égalité si et seulement s'il existe des constantes A et B telles que $f(x) = A\sin(2\pi x) + B\cos(2\pi x)$.

Exercice 4 Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikx}$ le *noyau de Dirichlet d'ordre N* et soit $S_N f(x) := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ la somme partielle N-ème de la série de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$. La fonction $F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$ s'appelle *noyau de Fejer*.

Montrer :

(a) $S_N f = f * D_N$;

(b) $D(-x) = D(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(c) $D_N(x) = \dfrac{\sin[(2N+1)\pi x]}{\sin(\pi x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; ;

(d) $\int_{-1/2}^{0} D_N(x)\,dx = \int_0^{1/2} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}$;

(e) $F_N(x) = \dfrac{1}{N}\Big(\dfrac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)}\Big)^2$.