Université Paul Verlaine Metz | Année universitaire 2004/2005
Analyse de Fourier

Feuille de TD n^0 4. Séries de Fourier sur $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Exercice 1 Montrer que la transformation de Fourier est un'application linéaire injective de $L^1(\mathbb{T})$ dans $C_0(\mathbb{Z})$.
Indications : Montrer d'abord que si $f \in C(\mathbb{T})$ et $\widehat{f}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $f = 0$ pp. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on considére la fonction $F(x) := \int_{-1/2}^{x} f(t)\, dt$.

Exercice 2 Soient $0 \le a < b \le 1$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b (S_N f)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

où

$$(S_N f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

est la somme partielle N-ème de la série de Fourier de f.
Indications : $S_N f = D_N * f$ où D_N est le noyau de Dirichlet.

Exercice 3 (a) Montrer qu'une fonction C^1 à morceaux satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet.

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{\pi k} = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{pour } x \in]0,1[\\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

(c) Déduire de ce qui précède que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Exercice 4 Soit α un nombre réel non nul. Montrer que pour tout $x \in [-1/2, 1/2[$

$$e^{2\pi\alpha x} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{\sinh(\pi\alpha)}{\alpha - ik} \, e^{2\pi i k x}$$

$$\cosh(2\pi\alpha x) = \frac{\sinh(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha \sinh(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 + k^2} \cos(2\pi k x)$$

$$\sinh(2\pi\alpha x) = -2\frac{\sinh(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\alpha^2 + k^2} \sin(2\pi k x)\,.$$

En déduire que

$$\frac{\pi}{\sinh(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 + k^2}$$

$$\coth(\pi\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + k^2}$$