Université de Metz Année universitaire 2004/2005
Outils mathématiques SV1

Feuille de TD n^0 2. Fonctions exponentielles, logarithmiques et puissances ; ajustement

Exercice 1 Les coordonnées semi-logarithmiques et logarithmiques permettent de représenter par des droites les fonctions exponentielles et les fonctions puissances.

En *coordonnées semi-logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = x, \qquad Y = \log y\,.$$

En *coordonnées logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(\log x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = \log x, \qquad Y = \log y\,.$$

En outre, on peut considérer des *coordonnées semi-logarithmiques népériennes* (ou *naturelles*) où le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(x, \ln y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = x, \qquad Y = \ln y\ .$$

(a) Déterminer la relation entre coordonnées semi-logarithmiques et coordonnées semi-logarithmiques népériennes.

(b) Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = 6e^{2x}$ en coordonnées semi-logarithmiques et en coordonnées semi-logarithmiques népériennes.

(c) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = Ce^{ax}$ en coordonnées semi-logarithmiques népériennes en supposant que $a > 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

(d) Tracer le graphe de la fonction puissance $y = 4x^{\sqrt{5}}$ en coordonnées logarithmiques.

(e) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction puissance $y = Cx^a$ en coordonnées logarithmiques en supposant que $a < 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

Exercice 2 Le degré d'acidité ou d'alcalinité des solutions est indiqué par le pH, qui est défini par

$$\mathrm{pH} := -\log[\mathrm{H}^+]\,,$$

où $[\mathrm{H}^+]$ est la concentration (en moles par litre) des ions libres H^+ dans la solution. L'échelle du pH varie entre 0 et 14. Le bas de l'échelle correspond aux solutions les plus acides tandis que le haut correspond aux solutions les plus alcalines. Le suc gastrique a pH égal a 2. Le sang est légèrement alcalin, avec un pH autour de 7, 4. L'ammoniac a un pH égal à 13.

(a) Déterminer $[\mathrm{H}^+]$ pour le suc gastrique, le sang et l'ammoniac.

(b) De quel facteur change-t-il $[\mathrm{H}^+]$ lorsque le pH augmente de 1 unité ?

Exercice 3 Les atomes d'une substance radioactive se décomposent en émettant un rayonnement radioactif. On désigne par le terme *demi-vie* le temps au cours duquel la quantité de ces atomes radioactives diminue de moitié. La quantité $M(t)$ de substance radioactive au temps t est donnée par

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-t/d}$$

où M_0 est la quantité de substance au temps initial $t = 0$ et d est sa demi-vie. La demi-vie du C^{14} est 5730 ans.

(a) Combien restera-t-il de C^{14} après 10000 ans si, au début, il y a eu $0,02$ mg de C^{14} ?

(b) La portion de C^{14} dans une fossile est égale à 1% de la quantité C^{14} de l'organisme vivant. Quel est l'âge du fossile ?

(c) On suppose que la quantité de C^{14} est 3,4 mg. Combien de temps faudra-t-il avant qu'il n'en reste plus que 1 mg ?

Exercice 4 (a) (1) Simplifier les expressions suivantes :

$$e^{2\ln x}; \quad e^{-3\ln(1/x)}; \quad 2^{3\log_2 x}; \quad 4^{-2\log_2 x}; \quad \log_3(9^x)\,.$$

(2) Ecrire les expressions suivantes comme fonctions exponentielles de base e et les simplifier :

$$3^x; \quad 2^{x^2-2}\,.$$

(3) Ecrire les fonctions suivantes comme logarithmes népériens et les simplifier :

$$\log_2(x^2); \quad \log_{e^2} 10\,.$$

(b) Soient $a, b \in]0,+\infty[$. On suppose $a \neq 1$ et $b \neq 1$. Vérifier si les égalités suivantes sont vraies ou fausses :

(1) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

(2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $\log_b x \cdot \ln b = \log_a x \cdot \ln a$.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $a^x = b^{x \ln a}$.

Exercice 5 On cherche le lien entre les variables x et y pour les données ci-dessous

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y	7,81	3,40	2,09	1,48	1,13

(a) Représenter les points dans deux graphiques séparés : en coordonnées logarithmiques et en coordonnées semi-logarithmique.

(b) Déterminer dans lequel des graphiques les points se trouvent environ sur une ligne droite. Vérifier les observations en calculant le coefficient de corrélation linéaire.

(c) Déterminer la droite d'ajustement au moyen de la méthode des moindres carrés.

(d) Donner le lien correspondant entre les variables x et y.

Exercice 6 La lentille d'eau (*Lemna minor*) peut coloniser rapidement un étang. Dans un étang presque vide, la croissance du nombre de plantes se déroule exponentiellement ; ensuite la croissance est freinée par le manque d'espace. Un étang a été photographié 6 fois dans une période de 3 semaines, et la percentuelle $N(t)$ d'étang couverte au temps t a été déterminée avec des techniques de traitement d'images. Les mensurations sont les suivantes :

t (en jours)	1	2	8	12	16	19
N (%)	3	9	19	42	75	84

On veut exprimer la relation entre t et N par une fonction logistique

$$N(t) = \frac{100}{1 + Ke^{-\lambda t}} \qquad (*)$$

avec $\lambda > 0$ et $K > 0$.

(a) On note $Y := \ln\left(\frac{100-N}{N}\right)$. A partir de (*), écrire Y en fonction de t.

(b) Donner une estimation des constantes K et λ en utilisant la méthode des moindres carrés.

Référence : M. de Gee, Wiskunde in Werking, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2002.

Exercice 7 L'enzyme catalase est démolie sous l'influence du soleil en présence de l'oxygène. Pour la concentration d'une solution catalase, les valeurs suivantes ont été mesurées

t (en m)	10	30	50	60	70	80
y (en mg/l)	90	30	10	5,8	3,7	2,0

Déterminer une fonction qui peut représenter la variable y comme fonction de la variable t.

Référence : M. de Gee, Wiskunde in Werking, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2002.

Exercice 8 Pour effectuer des mesures électriques en biologie ou en médecine, on utilise souvent des électrodes en contact avec un tissu biologique. Dans certains cas, le système électrodes-tissu se comporte comme une capacité et une résistance en parallèle ; les valeurs de la capacité C et de la résistance R dépendent de la fréquence F du courant travensant les électrodes.

L'étalonnage d'une sonde formée d'une paire d'électrodes parcourue par un courant d'intensité fixe a donné les résultats suivants (F en hertz, C en microfarads, R en ohms) :

F	30	50	100	200	300	500	1000	2000	3000	5000	10000
C	4,32	3,31	2,86	1,75	1,38	1,00	0,68	0,47	0,37	0,28	0,25
R	1180	1010	690	540	450	350	240	160	130	95	58

(a) Représenter graphiquement C et R en fonction de F en coordonnées cartésiennes et en coordonnées logarithmiques.

(b) On constate sur les graphiques en coordonnées logarithmiques que les points sont presque alignés. Déterminer les droites d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés et les répresenter sur les graphiques obtenus à la question (a).

(c) Donner des relations approchées reliant C et R comme fonction de F.

Référence : [B2], page 223.

Exercice 9 (extrait de l'examen blanc de decembre 2003) La masse M des feuilles d'un arbre est liée au diamêtre à la base D de son tronc par une relation de la forme $M = \alpha D^{\beta}$, où α et β sont des constantes. Les mesures de la masse M des feuilles (en g) et du diamêtre à la base D (en cm) effectuées sur un échantillon de 13 hêtres à grandes feuilles (Fagus grandifolia) sont réportées en coordinnées logarithmiques dans le tableau suivant :

$X = \log D$	0,70	1,37	1,07	1,22	0,62	0,75	0,58	1,00	0,63	0,81	1,34	1,25	1,41
$Y = \log M$	2,53	3,75	3,23	3,50	2,40	2,62	2,30	3,09	2,41	2,75	3,70	3,54	3,81

(a) Déterminer la médiane et l'étendue pour la variable D dans l'échantillon consideré.

(b) On peut vérifier que les moyennes de $\log D$ et $\log M$ dans l'échantillon sont

$$\overline{X} := \text{ moyenne de } \log D = 0{,}98 \qquad \text{et} \qquad \overline{Y} := \text{moyenne de } \log M = 3{,}05\,.$$

Peut-on déduire que les moyennes de D et de M sont respectivement $10^{0,98}$ et $10^{3,05}$? Justifier votre réponse.

(c) On note respectivement X_k et Y_k les k-ièmes données dans les échantillons des valeurs de $\log D$ et de $\log M$ dans le tableau. Déterminer la variance de la variable $\log D$ et la covariance de $\log D$ et de $\log M$ pour l'échantillon donné en sachant que

$$\sum_{k=1}^{13} X_k^2 = 13{,}68 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{13} X_k Y_k = 41{,}01\,.$$

(d) Déterminer au moyen de la méthode des moindres carrés la droite de regression $Y = aX + b$ pour les données du tableau.

(e) Donner une estimation les constantes α et β de la relation $M = \alpha D^{\beta}$ à partir de l'échantillon consideré.

(f) En utilisant la loi approchée déterminée dans (e), déduire la masse des feuilles d'un hêtre à grandes feuilles dont le diamêtre à la base est de 20 cm.