Université de Metz
Outils mathématiques SV1

Année universitaire 2004/2005

Feuille de TD n^0 3. Suites

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, évaluer les 10 premières termes de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et faire une hypothèse sur sa limite. Ensuite, déterminer mathématiquement la limite.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$; (b) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{2n^2-1}$.

Exercice 2 Soit $\{r^n\}$ la suite géométrique de raison r. Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1\,, \\ 1 & \text{si } r = 1\,, \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1\,. \end{cases}$$

Exercice 3 (a) Evaluer les 5 premières termes de la suite récurrente

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \qquad \text{avec} \qquad a_0 = 2\,.$$

(b) Déterminer les points fixes de la suite récurrente.

(c) Montrer que pour tout n on a $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n}$.

(d) Ecrire une formule de récurrence pour la suite de terme général $a_n = \dfrac{4^n+1}{4^n}$.

Exercice 4 Pour certaines espèces d'insectes évoluant par cycle de reproduction annuel, l'évolution générale est caractérisée par une suite $\{a_n\}$ des nombres d'individus adultes à chaque génération. Une hypothèse simple d'évolution est que le nombre d'insectes à un instant donné ne dépend que du nombre d'insectes à la génération précédente. Le suite soit donnée par récurrence par

$$a_{n+1} = Ca_n\left(1 - \frac{a_n}{L}\right), \tag{1}$$

où $C > 0$ est un coefficient de reproduction et L le nombre maximum d'insectes pouvant vivre dans la milieu étudié. On peut montrer que la valeur de a_n est positive et reste inférieure à L si $0 < C < 4$. On suppose que $L = 1000$ et que la population initiale est $a_0 = 330$.

(a) Calculer les valeurs de a_n pour n de 1 à 16 si $C = 0{,}8$ ou $C = 2{,}6$ (dans les listes remplacer a_n par l'entier le plus proche).

(b) Montrer que les seules limites possibles de la suite $\{a_n\}$ sont $a = 0$ ou $a = L(1 - 1/C)$.

(c) On suppose que le coefficient de reproduction est faible, c'est-à-dire $C < 1$. Montrer que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et que sa limite est 0 (il y a extinction de la population).

Référence : [B2], page 249.

Exercice 5 (extrait de l'examen blanc de decembre 2003) Un modèle discret pour la mitose en présence d'un facteur inhibiteur est donné par une suite $\{P_n\}$ dans laquelle le nombre P_{n+1} de cellules à la $(n+1)$-ième génération est lié au nombre P_n de cellules à la n-ième génération par la relation

$$P_{n+1} = \frac{2P_n}{1 + (aP_n)^b}\,,$$

où a et b sont des constantes telles que $0 < a < 1$ et $b > 0$. On suppose que le nombre initial de cellules P_0 est positif : $P_0 > 0$. On peut alors montrer que $P_n > 0$ pour tout n.

(a) Vérifier que la suite $\{P_n\}$ est croissante si et seulement si $P_n \leq 1/a$ pour tout n.

On suppose que $\{P_n\}$ est croissante. D'après (a) la suite $\{P_n\}$ est aussi bornée, donc convergente. Soit $P = \lim_{n\to\infty} P_n$.

(b) Montrer que $P > 0$.

(c) Déterminer la valeur de P.

Exercice 6 (extrait de l'examen de janvier 2003) Dans le modèle de Ricker discret pour la croissance d'une population le nombre P_{n+1} d'individus au temps $n+1$ est lié au nombre P_n d'individus au temps n par la relation

$$P_{n+1} = aP_n e^{-bP_n} \,,$$

où a et b sont des constantes telles que $a > 1$ et $b > 0$.

(a) Vérifier que la suite $\{P_n\}$ est croissante si et seulement si $P_n \leq \frac{\ln a}{b}$ pour tout n.

(b) On suppose que $\{P_n\}$ est convergente. Soit $P = \lim_{n\to\infty} P_n$. Déterminer les valeurs possibles de P.

Exercice 7 On considére la suite récurrente

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \qquad \text{avec} \qquad a_0 = 2\,.$$

(a) Déterminer les points fixes de la suite.

(b)* Montrer que $2 \leq a_n < 3$ pour tout n.

(c)* Montrer que la suite est strictement croissante, càd que $a_{n+1} > a_n$ pour tout n.

(d)* Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exercice 8* Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (3^{-n} - 4^{-n})$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n 3^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n 3^{-n}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 3^{-n}}{n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

Exercice 9* La suite de Fibonacci $\{f_n\}$ fut introduite (en 1200) par Leonardo de Pisa, plus connu sous le nom de Fibonacci, pour décrire la croissance d'une population de lapins. Le terme f_n de la suite donne le nombre de couples de lapins au bout de n mois, dans une population (idéale) de lapins, si on suppose que :

(1) le premier mois, il y a juste un couple de lapereaux,

(2) des lapereaux ne peuvent être productifs qu'à partir du deuxième mois,

(3) chaque mois, chaque couple de lapin engendre un nouveau couple,

(4) les lapins ne meurent jamais.

La suite est donc définie par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 3$

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \qquad \text{avec} \qquad f_1 := 1 \qquad \text{et} \qquad f_2 := 1\,.$$

(a) Déterminer les premiers 15 nombres dans la suite de Fibonacci.

(b) Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n$.

Pout tout $n \geq 1$ soit $a_n := f_{n+1}/f_n$.

(c) Vérifier que $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$.

(d) En supposant que $\{a_n\}$ converge, déterminer sa limite.

(e) Donner une interprétation de la relation de récurrence $f_{n+2} = f_n + 2f_{n+1}$ in terms de croissance d'une population de lapins.

Les exercices marqués par un * sont facultatifs