Université de Metz — Année universitaire 2004/2005
Outils mathématiques SV1

Feuille de TD n^0 4. Fonctions

Exercice 1 (a) Déterminer le domaine de définition des fonctions

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}\,.$$

Déterminer les limites (ou les valeurs) de f et g aux bornes de leur domaine de définition.

(b) Etudier la parité de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Exercice 2 La taille d'un enfant en âge préscolaire peut être estimée par une formule empirique. Si $f(x)$ exprime la taille (en cm) à l'âge x (en ans), alors $f(x)$ est définie pour $0,5 \leq x \leq 6$ par :

$$f(x) = 70,3 + 5,1x + 9,2\ln x\,.$$

Étudier la fonction f dans le domaine $0,5 \leq x \leq 6$.

Exercice 3 Pour beaucoup d'enzymes, la vitesse v d'une réaction chimique dépend de la concentration $[S]$ de l'enzyme selon l'équation de Michaelis-Menten

$$v = V_{\max}\frac{[S]}{[S]+K}\,,$$

où $V_{\max}$ est la vitesse maximum possible et K est la *constante de Michaelis-Menten*, qui est la concentration pour laquelle $v = V_{\max}/2$.

Étudier la fonction $y = V_{\max}\dfrac{x}{x+K}$, où $V_{\max}$ et K sont des constantes positives.

Exercice 4 La quantité $M(t)$ d'une substance radioactive au temps t est donnée par la formule

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-t/d}$$

où M_0 est la quantité de substance au temps initial $t = 0$ et d est sa demi-vie. La demi-vie du strontium-90 est 25 ans.

(a) Le taux de désintégration d'une substance radioactive est défini par $T(t) := \frac{M'(t)}{M(t)}$. Calculer le taux $T(t)$ de désintégration du strontium-90.

(b) Étudier la fonction $M(t)$ pour le strontium-90.

Exercice 5 Le modèle de croissance le plus souvent utilisé pour les animaux aquatiques (à respiration branchiale) est celui de von Bertalanffy. Selon ce modèle, le poids $y(t)$ d'un animal aquatique est lié au temps t (compté à partir de la naissance de l'animal) par la relation

$$y(t) = A(1-e^{-Kt})^3\,,$$

où A et K sont des constantes positives.

(a) Etudier y comme fonction de $t \in [0, +\infty[$.

(b) Donner une interpretation de la constante A.

Exercice 6 (extrait de l'examen blanc de decembre 2003) Lorsqu'un médicament est injecté dans le sang, sa concentration y (en mg/litre) après t minutes est donnée par

$$y(t) = te^{-Ct}$$

où C est une constante positive qui dépend de la quantité de médicament injectée. Etudier $y(t)$ comme fonction de $t \in [0, +\infty[$ en déterminant :

(a) Les limites (ou les valeurs) de $y(t)$ aux bornes de l'intervalle de définition.

(b) Les asymptotes eventuelles.

(c) Les valeurs de t pour lesquelles $y(t) > 0$ et ceux pour lesquelles $y(t) = 0$.
(d) La dérivée de y. En déduire la croissance/décroissance et les extrema eventuels de y.
(e) Le tableau de variation de y.
(f) La dérivée seconde de y. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion eventuels de y.
(g) Tracer le graphe de y.

Exercice 7* (extrait de l'examen de janvier 2004) Dans le modèle de Jolicoeur pour la croissance d'une population, le nombre $y(t)$ d'individus au temps t est donné par la fonction

$$y(t) = \frac{y_\infty}{1 + b\,t^{-m}}.$$

où y_∞, b et m sont des constantes positives. Dans cet exercice *nous fixons la valeur* $m = 2$. Donc pour $t \in]0, +\infty[$:

$$y(t) = \frac{y_\infty}{1 + b\,t^{-2}} = \frac{y_\infty t^2}{t^2 + b}\,.$$

Etudier $y(t)$ comme fonction de $t \in]0, +\infty[$ en déterminant :
(a) Les limites (ou les valeurs) de $y(t)$ aux bornes de l'intervalle de définition.
(b) Les asymptotes éventuelles.
(c) Les valeurs de t pour lesquelles $y(t) > 0$.
(d) La dérivée de y. En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de y.
(e) Le tableau de variation de y.
(f) La dérivée seconde de y. En déduire la convexité/concavité et les points d'inflexion éventuels de y.
(g) Tracer le graphe de y.

Exercice 8* (extrait de l'examen de septembre 2004)
Un parasitoïde est un organisme qui se développe sur ou dans un autre organisme (son hôte) et en extrait sa nourriture. La mort de l'hôte est un résultat direct ou indirect de son développement. Dans la majorité des cas, le parasitoïde et son hôte sont des insectes. Un entomologiste examine l'efficacité des insectes parasitoïdes dans la lutte biologique. Il pose une femelle adulte parasitoïde sur une plante avec x pupes de diptères. Après un jour, le nombre de pupes des diptères hôtes parasitées est P. Le lien entre x et P est modelé par la relation

$$P(x) = 64(1 - e^{-0{,}01x})\,.$$

(a) Etudier $P(x)$ comme fonction de $x \in [0, +\infty[$ en déterminant :
  (i) Les limites (ou les valeurs) de $P(x)$ aux bornes de l'intervalle de définition.
  (ii) Les asymptotes éventuelles.
  (iii) Les valeurs de x pour lesquelles $P(x) > 0$.
  (iv) La dérivée de P. En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de P.
  (v) Le tableau de variation de P.
  (vi) La dérivée seconde de P. En déduire la convexité/concavité et les points d'inflexion éventuels de P.
  (vii) Tracer le graphe de P.
(b) Quelle est l'interpretation du nombre 64 dans la formule ci-dessus ?
(c) Pour une deuxième sorte de parasitoïde, on a trouvé la relation $P(x) = 40(1-e^{-0{,}1x})$. On supposera que $x \geq 100$. Laquelle de ces deux sortes est la plus efficace comme pesticide biologique (càd donne la plus grande valeur de $P(x)$) ? Expliquer votre réponse.

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x^4 + 1)\,dx\,, \qquad \int_1^e x \ln x\,dx\,, \qquad \int x e^{x^2}\,dx$$

Les exercices marqués par un * sont facultatifs