## Feuille de TD n$^0$ 1

**Exercice 1** Lorsque plusieurs espèces animales vivent dans un même écosystème, elles entrent généralement en compétition pour leur alimentation. Lorsque deux animaux se disputent la même nourriture, le gagnant est celui qui réussit à s'approprier l'objet de convoitise. Supposons qu'un animal de l'espèce $i$ l'emporte sur un animal de l'espèce $j$ dans une proportion de $a_{i,j} = \frac{i}{i+j}$.

(a) Construire la matrice de compétition, $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$, entre trois espèces animales d'un même écosystème.

(b) Quelle espèce gagne le plus souvent lorsqu'elle est en compétition avec les autres espèces ?

(c) Que vaut $A + A^t$ ? Expliquer le résultat.

*Référence :* L. Amyotte, Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications, ERPI, page 223.

**Exercice 2 (Extrait de l'examen de septembre 2004)** Dans un parc naturel en Afrique, les zèbres sont comptés tous les 5 ans. Les juments sont réparties sur trois classes : jeunes juments (de 0 à 4 ans, càd dans les cinq premières années de vie) ; juments adultes (de 5 à 9 ans, càd dans les deuxièmes 5 ans de vie) ; vieilles juments (avec 10 ans ou plus).

Ceci fournit pour chaque année de mesure $x$, un vecteur $v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$, où $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$ sont respectivement le nombre de jeunes juments, de juments adultes et de vieilles juments dans l'an $x$.

En 1990 on a trouvé la distribution $v(1990) = \begin{pmatrix} 160 \\ 96 \\ 64 \end{pmatrix}$.

On a déduit ensuite que chaque recensement suivant peut être prédit à l'aide de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

càd, pour tout $x$ on a $v(x+5) = A \cdot v(x)$.

(a) Interpréter chaque coefficient de la matrice $A$ dans le contexte donné.

(b) Quelle est le nombre de vieilles juments dans l'an 2005 selon le modèle donné ?

**Exercice 3** Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé ($I$), malade ($M$), non malade et non immunisé ($S$). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état $S$ avec une probabilité $0,1$ ;
- étant dans l'état $S$, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état $M$ avec une probabilité $0,5$ ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état $I$ avec une probabilité $0,8$.

(a) Tracer le diagramme des probabilités de transition qui décrit cette situation et écrire la matrice des probabilités de transition.

(b) Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de deux, trois et six mois, pour chacune des situations suivantes :

(i) au, départ, il est immunisé ;

(ii) au départ, il est non malade et non immunisé ;

(iii) au départ, il est malade.

*Référence :* http :www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/html/exercices.htm

**Exercice 4** Les caractéristiques génétiques d'un être vivant sont déterminées par les gènes des parents. Dans sa forme la plus simple, une transmission autosomique récessive concerne une paire de gènes dans laquelle le gène $A$ est dominant sur l'effet (ou neutralise l'effet) du gène mutant ou récessif $a$ dans n'importe quelle combinaison. Les combinaisons possibles sont $AA$, $aa$, $aA$ et $Aa$ (le combinaisons $aA$ et $Aa$ sont équivalents). $AA$, $Aa$, et $aa$ sont appelée les génotypes. Dans une certaine population de perruches, la couleur des plumes est contrôlée par un modèle autosomique de transmission. Le gène dominant $A$ correspond à la couleur verte et le gène récessif $a$ à la couleur bleue. Les génotypes $AA$ et

$Aa$ donnent des plumes vertes et le génotype $aa$ plumes bleues. Chaque progéniture hérite un gène de chaque parent d'une façon aléatoire.

Ici on considère le croisement avec les perruches dominantes seulement. Ainsi nous regardons le croisement de $AA$, $Aa$ et $aa$ avec $AA$. Nous sommes intéressés par les probabilités que la progéniture soit de type $AA$, $Aa$ ou $aa$ dans chacun de ces cas.

*Croisement du $AA$ avec $AA$ :* Puisque la progéniture aura un gène de chaque parent, ce sera du type $AA$. Ainsi, les probabilités de $AA$, $Aa$ et $aa$ sont 1, 0 et 0 respectivement. Toute la progéniture a les plumes vertes.

*Croisement du $Aa$ avec $AA$ :* Les possibilités pour la progéniture sont $AA$, $AA$ (prenant $A$ premier du parent et chaque $A$ alternativement du deuxième parent), $aA$ et $aA$ (prenant $a$ du premier parent et chaque $A$ alternativement du deuxième parent). Ainsi les probabilités de $AA$, $Aa$ et $aa$ sont 1/2, 1/2 et 0 respectivement. Toute la progéniture a encore les plumes vertes.

*Croisement du $aa$ avec $AA$ :* Il y a seulement la possibilité $aA$. Ainsi les probabilités de $AA$, $Aa$ et $aa$ sont 0, 1 et 0 respectivement. Toute la progéniture a encore les plumes vertes.

(a) Déterminer le diagramme et la matrice des probabilités de transition.

(b) On suppose que dans une population de perruches, la distribution initiale des génotypes est donnée par le vecteur

$$X_0 = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)^t ,$$

où les composantes de $X_0$ représentent la fraction des oiseaux des génotypes $AA$, $Aa$ et $aa$ au début. Soit $X_n$ le vecteur de distribution des génotypes à la $n$-ème génération. Déterminer $X_1$, $X_2$, $X_3$ et $X_4$. Peut-on en déduire une formule pour la distribution de $Aa$ et $aa$ à la $n$-ème génération ?

(c) Créer un modèle pour la progéniture de croisement avec une perruche hybride de génotype $Aa$.

**Exercice 5** Quelle quantité de lait contenant $1,5\%$ de matières grasses doit on mélanger avec de la crème contenant $30\%$ de matières grasse pour obtenir 10 litres de lait contenent $4,5\%$ de matières grasse ?

**Exercice 6** Pour produire une certaine substance chimique, trois ingrédients différents, $A$, $B$ et $C$, sont nécessaires. Ils doivent être dissous dans l'eau séparément et ensuite les trois solutions doivent être mélangées pour donner le produit chimique désideré. Supposons qu'une solution contenant $A$ à 2 g/cm$^3$ combinée avec une solution contenant $B$ à 3 g/cm$^3$ et avec une solution contenant $C$ à 1 g/cm $^3$ donne 15 g du produit chimique. Si les proportions pour $A$, $B$, $C$ dans ces solutions sont changées respectivement à 2, 4 et 2 g/cm$^3$ (tandis que les volumes demeurent les mêmes), alors 20 g du produit chimique sont obtenus. Finalement, si les proportions sont changées respectivement à 2, 1 et 1 g/cm$^3$, alors 10 g du produit chimique sont produits. Quels sont les volumes (en centimètres cubiques) des solutions contenant $A$, $B$ et $C$ ?

**Exercice 7 (Extrait de l'examen de janvier 2004)** En utilisant un système d'équations linéaires, équilibrer la réaction chimique

$$\mathrm{Al(OH)_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2O}\,.$$

**Exercice 8 (Extrait de l'examen de janvier 2004)** Un technicien doit administrer à un animal de laboratoire trois repas principaux par jour. Il dispose de deux aliments A1 et A2. La quantité (en grammes) de protéines, de matières grasses et de fibres dans une portion de 10 g des deux aliments est donnée par la matrice suivante :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{protéines} \\ \text{gras} \\ \text{fibres} \end{array}$$

Chaque repas pése au total 10 g ; les proportions de chacun de ces aliments dans chaque repas sont indiquées par la matrice $B$ :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{repas 1} & \text{repas 2} & \text{repas 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{A1} \\ \mathrm{A2} \end{array}$$

(a) Calculer le produit matriciel $AB$ et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.

(b) Calculer le produit matriciel $BA$ et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.

(c) En combinant A1 et A2, on veut obtenir un repas (de poids arbitraire) contenant $p$ grammes de protéines, $g$ grammes de matières grasses et $f$ grammes de fibres. Quelles sont les conditions sur $p$, $g$ et $f$ pour que cela soit possible ?