Feuille de TD n^0 2

Exercice 1 (Extrait de l'examen de septembre 2004) Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel α le système d'équations linéaires suivant. On supposera que $\alpha \neq 1$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & 2z & = & -4 \\ -x & + & y & + & (\alpha+4)z & = & 10 \\ x & - & \alpha y & - & 5z & = & -10 \end{array} \right.$$

Exercice 2 (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer, si possible, l'inverse des matrices ci-dessus.

(c) Résoudre le sysmème linéaire $A_2 X = B$, où

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

est le vecteur des inconnues.

Exercice 3 La couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentées par un vecteur

$$C = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} r = \text{intensité de la composante rouge} \\ g = \text{intensité de la composante verte} \\ b = \text{intensité de la composante bleue} \end{array}$$

La rétine d'un oeil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les bâtonnets. Les premières sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite scotopique et vision à niveaux de gris) et ne voient pas les couleurs. Ils mesurent l'intensité i de la lumière visible. Les secondes sont responsables de la vision diurne colorée. La vision de ces couleurs n'est pas toutefois directe, mais est envoyée au cerveau au moyen d'un signal

$$I = \begin{pmatrix} i \\ l \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} i = \quad \text{intensité de la lumière} = \dfrac{r+g+b}{3} \\ l = \text{intensité des ondes longes} = r - g \\ c = \text{intensité des ondes courtes} = b - \dfrac{r+g}{2} \end{array}$$

(a) Déterminer la matrice A telle que $AC = I$.

(b) Calculer, si possible, l'inverse de A.

(c) Donner les composantes r, g, b en fonction de i, l, c.

Référence : M. de Gee, Wiskunde in Werking, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2002.