Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2005-2006
Mathématiques L1

Feuille de TD n^0 1. Fonctions élémentaires

Exercice 1 Les atomes d'une substance radioactive se décomposent en émettant un rayonnement radioactif. On désigne par le terme *demi-vie* le temps au cours duquel la quantité de ces atomes radioactives diminue de moitié. La quantité $M(t)$ de substance radioactive au temps t est donnée par

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-t/d} \qquad (*)$$

où M_0 est la quantité de substance au temps initial $t = 0$ et d est sa demi-vie. La demi-vie du Polonium 210 (Po^{210}) est 140 jours.

(a) Combien restera-t-il de Po^{210} après 50 jours si, au début, il y a eu $0,1$ mg de Po^{210} ?

(b) La quantité de Po^{210} est égale au 20% de sa quantité initiale. Combien de temps a-t-il passé ?

(c) A partir de la formule (*), déterminer la demi-vie d'une substance radioactive en sachant que après 5 jours sa quantité est diminuée jusqu'à 37% de sa quantité initiale.

Exercice 2 Selon le modèle de von Bertalanffy, la longueur L d'un poisson est liée à son âge x par une relation du type $L = L_\infty(1 - e^{-Kx})$ où L_∞ et K sont des constantes positives.

(a) Montrer que $L < L_\infty$ pour tout valeur de x.

(b) Déterminer x comme fonction de L.

Exercice 3 Déterminer le domaine maximal de définition et l'image des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}; \quad f_2(x) = (8 - x^2)^{1/3}; \quad f_3(x) = \sin(1/x); \quad f_4(x) = \log(1 - x^2)\,.$$

Exercice 4 Déterminer la parité de la fonction $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Exercice 5 Le degré d'acidité ou d'alcalinité des solutions est indiqué par le pH, qui est défini par

$$\mathrm{pH} := -\log[\mathrm{H}^+]\,,$$

où $[\mathrm{H}^+]$ est la concentration (en moles par litre) des ions libres H^+ dans la solution. L'échelle du pH varie entre 0 et 14. Le bas de l'échelle correspond aux solutions les plus acides tandis que le haut correspond aux solutions les plus alcalines. Le suc gastrique a pH égal a 2. Le sang est légèrement alcalin, avec un pH autour de $7,4$. L'ammoniac a un pH égal à 13.

(a) Déterminer $[\mathrm{H}^+]$ pour le suc gastrique, le sang et l'ammoniac.

(b) De quel facteur change-t-il $[\mathrm{H}^+]$ lorsque le pH augmente de 1 unité ?

Exercice 6 Soient $a, b \in]0, +\infty[$. On suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 1$. Démontrer les égalités suivantes :

(a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $b^x = a^{x \log_a b}$.

Exercice 7 (a) Simplifier les expressions suivantes :

$$e^{-\ln(1/x)};\quad 2^{5\log_2 x};\quad 5^{5\log_{1/5} x};\quad \log_4(16^x);\quad \ln(x^2)+\ln(x^{-3})\,.$$

(b) Écrire les expressions suivantes comme fonctions exponentielles de base e et les simplifier :

$$(3e)^x;\quad 2^{10}\cdot 4^{15}\,.$$

(c) Écrire les fonctions suivantes comme logarithmes népériens et les simplifier :

$$\log_2(x^2);\quad \log_{e^3} 5\,.$$

Exercice 8 (a) Tracer le graphe des fonctions exponentielles $y = 6\cdot 10^x$ et $y = 4e^{2x}$ en coordonnées semi-logarithmiques (X, Y), où $X = x$ et $Y = \log y$.

(b) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = C10^{ax}$ en coordonnées semi-logarithmiques (X, Y), avec $X = x$ et $Y = \log y$, en supposant que $a > 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

(c) Tracer le graphe de la fonction puissance $y = 4x^{\sqrt{5}}$ en coordonnées logarithmiques (X, Y), où $X = \log x$ et $Y = \log y$.

(d) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction puissance $y = Cx^a$ en coordonnées logarithmiques (X, Y), avec $X = \log x$ et $Y = \log y$, en supposant que $a < 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

Exercice 9 Dans l'étude d'une culture bactérienne, le nombre de bactéries N est liée au temps de mesurement t (en heures) par une relation de type exponentielle. Déterminer cette relation si :

(a) en coordonnées semi-logarithmiques népériennes ($X = t, Y = \ln N$), la relation est décrite par l'équation $Y = 2X + a$, où a est une constante ;

(b) Le nombre de bactéries au temps $t = 0$ est $N(0) = 1000$.

Exercice 10 La masse y (en g) des feuilles d'un arbre est liée au diamètre à la base x (en cm) de son tronc par une relation $y = Cx^k$ où C et k sont des constantes positives. Déterminer C et k en sachant que :

(a) en coordonnées logarithmiques ($X = \log x, Y = \log y$), la relation est décrite par une droite de pente 1,8 ;

(b) une masse de 500 g correspond à un diamètre de 5 cm.