

Mathématiques L1 (SV)
Année 2005-2006

Angela Pasquale

DÉPARTEMENT ET LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE METZ
E-mail address: `pasquale@math.univ-metz.fr`

Table des matières

Chapitre 1. Fonctions élémentaires	5
1. Modèles continus et modèles discrets	5
2. Propriétés élémentaires des fonctions	6
3. Fonctions élémentaires	7
4. Échelles et coordonnées logarithmiques	11
Chapitre 2. Suites	13
1. Propriétés de convergence	16
2. Suites divergentes à $\pm\infty$	16
3. Suites récurrentes	17
Chapitre 3. Étude de fonctions	21
1. Limites d'une fonction	22
2. Applications : asymptotes	24
3. Continuité d'une fonction	25
4. Dérivabilité d'une fonction	25
5. Relation entre continuité, dérivabilité et monotonie	27
6. Convexité et concavité d'une fonction	28
6. Plan d'étude d'une fonction f	29
8. Exemple : la courbe logistique	29
Chapitre 4. Intégration	33
Bibliographie	37

Fonctions élémentaires

1. Modèles continus et modèles discrets

Dans les sciences naturelles et de la vie, les mathématiques sont des outils qui permettent de formuler et d'étudier des modèles des phénomènes biologiques ou physiques.

Un *modèle* est une description mathématique d'un phénomène : d'une côté, il cherche à expliquer le phénomène considéré à partir de phénomènes plus simples ou de principes généraux ; d'autre côté, il permet de prévoir certains aspects du phénomène considéré, par exemple son évolution dans le temps.

Dans un modèle, les aspects qui peuvent être observés expérimentalement et mesurés se précisent au moyen des variables. Une *variable* est un caractère de l'objet ou du phénomène observé. Par exemple, des variables pour caractériser une espèce de fleurs sont la forme, la taille, la couleur, le nombre et la tailles des pétales, ou le nombre de pistils et d'étamines. Dans les études d'évolution d'une population, des variables importantes sont le nombre, l'âge ou le sexe des individus de la population.

A chaque variable peuvent être associées des *valeurs*. Par exemple, on mesure la hauteur d'une fleur et on donne à la variable " hauteur " la valeur 30 cm. La valeur dépend du choix d'une unité de mesure (dans l'exemple, le centimètre), qui doit toujours être indiquée. Les variables pour lesquelles les valeurs sont des nombres sont appelées *variables numériques* (ou *quantitatives*). Les variables " couleur " et " forme " ne sont pas des variables numériques ; elles sont des *variables qualitatives*.

Les modèles mathématiques se fondent sur l'analyse des variables numériques. Dans un modèle on a souvent besoin de regarder deux ou plusieurs variables liées entre eux. Supposons que deux variables, notées x et y , sont liées entre eux par une relation de façon que la connaissance de x permet de prévoir la valeur de y correspondante. On dit alors que y est *fonction de x* et on l'écrit $y = f(x)$.

On considère par exemple les situations suivantes :

- (1) Selon la loi de Boyle, le volume V (exprimé en m^3) d'un gaz parfait, maintenu à température constante, est inversement proportionnel à sa pression P (en pascal). Cette loi est formulée mathématiquement par : $V = \frac{C}{P}$, où C est une constante. Si la constante C est connue, alors donnée la valeur de la variable pression P , on peut déduire par cette formule la valeur correspondante de la variable V .
- (2) Le nombre N d'individus d'une population dépend du temps t . Dans une étude d'une population d'insectes, le nombre d'individus est calculé chaque semaine à partir d'un instant initial $t = 0$. On suppose que ce nombre peut être modélisé par la formule

$$N(t) = N_0 2^t \text{ individus } (t = 0, 1, 2, \dots \text{ semaines})$$

où N_0 est le nombre d'individus au temps $t = 0$. Dans ce modèle, la variable N est une fonction de la variable discrète temps (mesurée en semaines)

Dans le premier exemple, la variable P est une *variable continue*, c'est-à-dire ses valeurs sont n'importe quelle quantité dans un certain intervalle réel ; dans le deuxième exemple, la variable t

est une *variable discrète*, c'est-à-dire ses valeurs sont des quantités isolées qui varient par multiples d'une certaine durée. Dans le premier cas on a donné un *modèle continu*, dans le deuxième un *modèle discret*.

DÉFINITION 1. Une *fonction* $f : A \rightarrow B$ est définie par la donnée d'un ensemble de départ A , d'un ensemble d'arrivée B et d'une correspondance f mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec un unique élément de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ est appelé le *domaine de définition* de la fonction ; l'ensemble d'arrivée est appelé le *domaine de variation* de la fonction.

DÉFINITION 2. On note par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. Un *nombre réel* est obtenu en formant un développement décimal quelconque. \mathbb{R} se figure idéalement comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. Une fonction est appelée *numérique* si son domaine de définition et son domaine de variation sont des parties de \mathbb{R} (d'habitude des intervalles, bornées ou non).

Une fonction est usuellement notée par un nom. Il y a des fonctions spéciales (comme p.ex. les fonctions sin, cos, log, etc.) ou bien des fonctions génériques avec un nom générique (par ex. f , g , h , F , etc.). Les valeurs dans le domaine de définition sont indiquées par une variable, par ex x ou t ; les valeurs correspondantes sont notées par $f(x)$ ou $f(t)$.

EXEMPLE 1.

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2 \quad (x \in [-1, 1])$$

$$x \longmapsto x^2$$

sont les notations employées pour représenter la fonction (appelée f) avec domaine de définition $[-1, 1]$, domaine de variation \mathbb{R} et qui associe à chaque élément de $[-1, 1]$ son carré.

REMARQUE 1. A chaque élément x du domaine de définition d'une fonction f est toujours associé une valeur unique, c'est-à-dire $f(x)$. On peut toutefois avoir des éléments du domaine de variation de f qui ne sont pas de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de définition de x . Le domaine de variation ne doit être confondu avec l'*image* de la fonction f , qui est la partie des éléments du domaine de variation de f qui sont de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de variation de f . Dans l'exemple 2, le nombre -1 est un nombre réel, donc dans le domaine de variation de la fonction $f(x) = x^2$ ($x \in [-1, 1]$), mais -1 n'est pas un carré d'un nombre réel ; l'image de f , qui est formée par les éléments qui sont de la forme x^2 avec $x \in [-1, 1]$, est l'intervalle $[0, 1]$.

REMARQUE 2. Si on écrit $f(x) = x^2$ sans indiquer explicitement le domaine de définition de f , ceci signifie qu'on prend comme domaine de définition la partie de \mathbb{R} formée de tout x pour lequel $f(x)$ existe. Dans cet exemple, on peut définir le carré de tout nombre réel. Le domaine maximal de définition à prendre est donc \mathbb{R} .

DÉFINITION 3. Le *graphe* (ou *courbe représentative*) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f . On dit aussi que l'équation du graphe de f est $y = f(x)$.

2. Propriétés élémentaires des fonctions

Par la suite, I note une partie de \mathbb{R} , comme par exemple un intervalle (fini ou infini) ou une union d'intervalles.

REMARQUE 3. On utilisera la notation suivante pour les intervalles :

- (1) $]a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x < b$;
- (2) $[a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x \leq b$;
- (3) $[a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x < b$;
- (4) $]a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x \leq b$;

DÉFINITION 4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie I de \mathbb{R} telle que $-x \in I$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

EXEMPLE 2. (a) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathbb{R} \setminus \{0\} :=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

REMARQUE 4. La fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f ; la fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie du graphe de f .

DÉFINITION 5. Soit $T > 0$. On dit que T est une *période* de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in I$ tel que $x+T \in I$. Dans ce cas on dit que f est *périodique*.

EXEMPLE 3. (a) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition \mathbb{R} ; $\sin(x)$ est impaire et $\cos(x)$ est paire.

(b) Le domaine de définition de $f(x) = \tan(x)$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ [ici \mathbb{Z} note l'ensemble des nombres entiers]. La fonction $\tan(x)$ est périodique de période π .

DÉFINITION 6. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

- *croissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strictement croissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$;
- *décroissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strictement décroissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$;
- *constante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$.

EXEMPLE 4. La fonction $f(x) = x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et $g(x) = -x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} ; la fonction h définie par $h(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante.

3. Fonctions élémentaires

3.1. Fonctions affines. Une *fonction affine* est définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$$

où a et b sont des constantes. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Si $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont deux points quelconques de la droite, alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

est appelé la *pente* de la droite; $b = f(0)$ est le point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées. Si $b = 0$, alors le graphe passe par l'origine du repère et f est appelé une *fonction linéaire*. f est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

3.2. Trinôme du second degré. La fonction définie par un *trinôme du second degré* est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son graphe est une parabole. Si $a > 0$, alors le sommet est un minimum ; si $a < 0$, il est un maximum. L'abscisse et l'ordonnée du sommet sont

$$x_s = -\frac{b}{2a}, \quad y_s = f(x_s) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

3.3. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques les plus importantes sont les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition \mathbb{R} . Leur image est l'intervalle $[-1, 1]$. Le domaine de définition de la fonction $\tan x$ est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et celui de la fonction $\cot x$ est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Elles sont périodiques de période π et leur image est \mathbb{R} .

3.4. Fonctions exponentielles et logarithmes. Soit $a > 0$ fixé. La *fonction exponentielle en base a* est définie par une relation de la forme

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La forme du graphe de la fonction exponentielle dépend de a . Elle est croissante pour $a > 1$, décroissante pour $0 < a < 1$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $a = 1$. Voir figure 1.

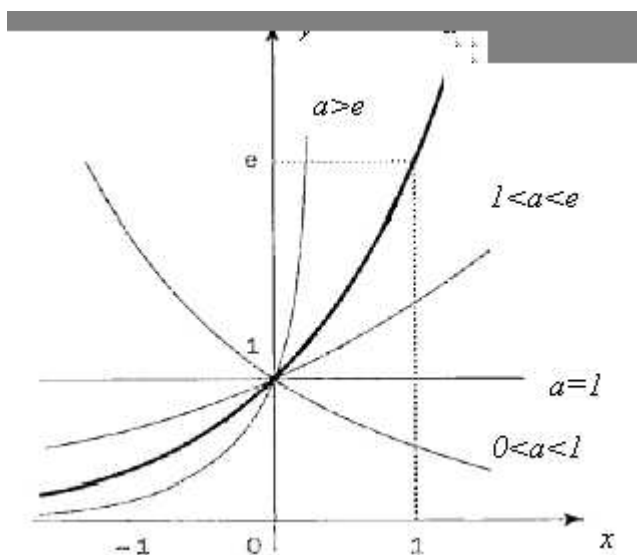


FIG. 1. Graphe de la fonction $y = a^x$

Propriétés fondamentales :

- $a^x > 0$;
- $a^x a^t = a^{x+t}$;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (car $a^{-x} a^x = a^{x-x} = a^0 = 1$);
- $(a^x)^t = a^{xt}$.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La *fonction logarithme en base a* est la fonction

$$f(x) = \log_a x \quad (x \in]0, +\infty[)$$

définie par la relation

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

On suppose, par exemple, que $a = 10$. Alors $\log_{10} 1000 = 3$ car $1000 = 10^3$.

Comme pour la fonction exponentielle, la forme du graphe de la fonction logarithme dépend de la valeur de a . Voir figure 2. Plus précisément, le graphe de $y = \log_a x$ est symétrique au graphe de $y = a^x$ par rapport à la droite $y = x$.

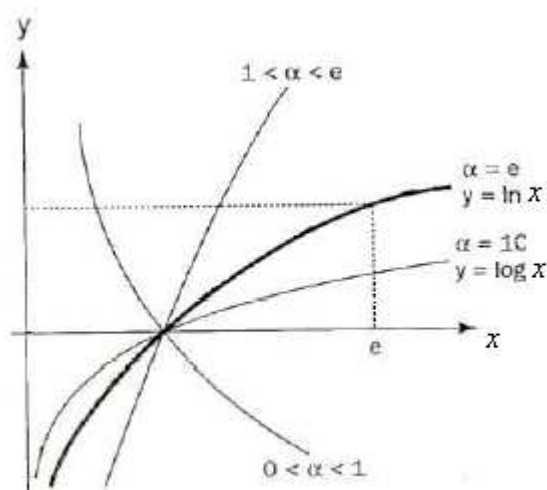


FIG. 2. Graphe de la fonction $y = \log_a x$

Propriétés fondamentales :

- $\log_a(xt) = \log_a x + \log_a t$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a(1/x) = -\log_a x$ (car $\log_a(1/x) + \log_a(x) = \log_a(1/x \cdot x) = \log_a 1 = 0$) ;
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deux valeurs importantes de la base a sont les suivantes :

- (a) $a =$ la *constante e d'Euler* (appelée aussi *nombre exponentiel* ou *nombre de Néper*). Elle vaut approximativement 2,718... Une des propriétés fondamentales de la constante e est liée à la croissance de la fonction exponentielle e^x (voir chapitre 4).

La fonction $\log_e x$ est notée $\ln x$ et s'appelle *logarithme népérien* (ou *naturel*).

- (b) $a = 10$. Dans ce cas, la fonction $\log_{10} x$ est notée $\log x$.

Propriétés :

- (a) Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

(b) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{(\ln a)x},$$

En particuliers : Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$10^x = e^{(\ln 10)x}.$$

Ici $\ln 10 \approx 2,3026\dots$

3.5. Fonctions puissances. Si $n \in \mathbb{N}$, on connaît la fonction puissance $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}$,

qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carré $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est aussi une fonction puissance, mais elle est définie seulement pour $x \geq 0$. En général, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *fonction puissance*

$$f(x) = x^\alpha$$

a domaine de définition égal à :

- \mathbb{R} , si $\alpha \in \mathbb{N}$
- \mathbb{R} , si $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, q impair et $q \neq 0$. Dans ce cas $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.
- $]0, +\infty[$ dans toutes les autres cases. Dans ces cases $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$. Pour $\alpha \geq 0$ on peut étendre le domaine de définition de x^α à $[0, +\infty[$ en posant $0^\alpha := 0$.

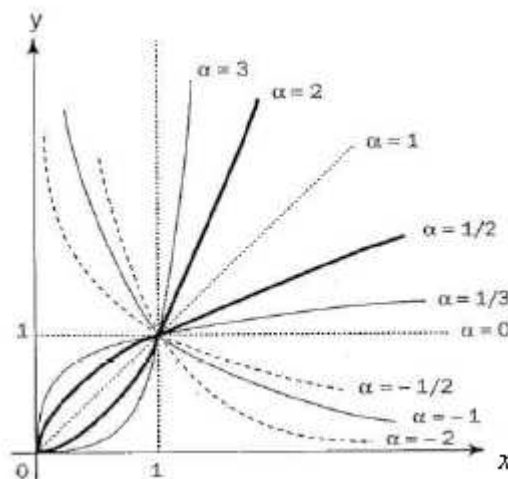


FIG. 3. Graphe de la fonction $y = x^\alpha$

Propriétés fondamentales :

- $x^\alpha > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$;
- $x^\alpha t^\alpha = (xt)^\alpha$;
- $1^\alpha = 1$;
- $(1/x)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$ (car $(1/x)^\alpha x^\alpha = 1^\alpha = 1$);

- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

La forme du graphe de la fonction puissance $y = x^\alpha$ dépend du valeur de α . Elle est croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $\alpha = 0$. Voir figure 3.

4. Échelles et coordonnées logarithmiques

L'*échelle linéaire* (ou *régulière*) est la ligne droite graduée usuelle, dans laquelle la distance entre deux points est proportionnelle à la différence de ses valeurs numériques.

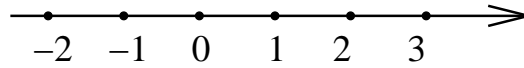


FIG. 4. L'échelle linéaire

Une échelle linéaire est mal adaptée pour la représentation d'une variable avec une gamme étendue de valeurs. On lui préfère une *échelle logarithmique*, dans laquelle le nombre étiqueté x est placé à une distance $\log x$ de l'origine. L'origine de l'échelle linéaire correspond à 1 car $\log 1 = 0$.

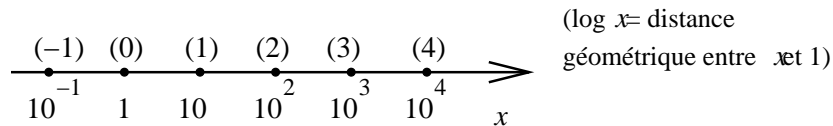


FIG. 5. L'échelle logarithmique

La distance qui sépare 1 de 10 est la même qui sépare 10 et 100 ou 100 et 1000 car

$$\begin{aligned} \log 10 - \log 1 &= 1 \\ \log 100 - \log 10 &= 2 - 1 = 1 \\ \log 1000 - \log 100 &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Donc l'échelle logarithmique dilate les valeurs faibles et rapproche les valeurs forts.

Les coordonnées semi-logarithmiques et logarithmiques permettent de représenter par des droites les fonctions exponentielles et les fonctions puissances, respectivement.

En *coordonnées semi-logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = x, \quad Y = \log y.$$

Pour représenter une fonction en coordonnées semi-logarithmiques on utilise une échelle linéaire sur l'axes des abscisses et une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

EXEMPLE 5. En coordonnées semi-logarithmiques, la fonction $y = 3 \cdot 10^{2x}$ est donnée par l'équation $Y = 2X + \log 3$. En effet, on a :

$$Y = \log y = \log(3 \cdot 10^{2x}) = \log 3 + \log(10^{2x}) = \log 3 + \log(10) \cdot 2x = \log 3 + 2X.$$

En *coordonnées logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(\log x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = \log x, \quad Y = \log y.$$

Pour représenter une fonction en coordonnées logarithmiques on utilise une échelle logarithmique sur l'axes des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

EXEMPLE 6. En coordonnées logarithmiques, la fonction $y = 3 \cdot x^{10}$ est donnée par l'équation $Y = 10X + \log 3$. En effet, on a :

$$Y = \log y = \log(3 \cdot x^{10}) = \log 3 + \log(x^{10}) = \log 3 + 10 \cdot \log x = \log 3 + 10X.$$

CHAPITRE 2

Suites

EXEMPLE 1. On va étudier l'évolution d'une population de bactéries. La population initiale est $a_0 = 100$. Soit

$$a_n := \text{nombre de bactéries après } n \text{ heures.}$$

On suppose qu'il existe une relation

$$a_{n+1} = ra_n$$

où r est un nombre réel positif indépendant de l'indice n . On obtient une suite (infinie) de nombres

$$a_0 = 100, \quad a_1 = 100r, \quad a_2 = 100r^2, \dots, \quad a_n = 100r^n, \dots$$

Le problème fondamental que nous étudierons est le comportement des termes a_n lorsque l'indice n devient infiniment grand. Par la suite considérée, ce comportement dépend de la valeur de r . Pour exemple :

- Si $r = 2$ on a :

$$a_0 = 100, \quad a_1 = 2 \cdot 100, \quad a_2 = 2^2 \cdot 100, \dots, \quad a_n = 2^n \cdot 100, \dots$$

Le terme général a_n devient infiniment grand avec n , et on écrira $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- Si $r = 1/2$ on a :¹

$$a_0 = 100, \quad a_1 = 100/2 = 50, \quad a_2 = 100/2^2 = 25, \dots, \quad a_n = 100/2^n, \dots$$

Le terme général a_n est toujours positif, mais devient infiniment petit avec n , ce qu'on écrira $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- Si $r = 1$ on a :

$$100 = a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots$$

On dira que la suite est constante.

Pour la population de bactéries nous déduisons que, selon la valeur de r , elle peut croître infiniment, ou bien s'éteindre, ou bien rester en nombre constante.

Ce que nous avons fait dans l'exemple est de construire une suite numérique a_n et de chercher sa limite. On va préciser mathématiquement ce procédé.

DÉFINITION 1. Une *suite (numérique)* est une liste ordonnée de nombres réels :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

On note cette suite aussi par $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a_n s'appelle le *terme général* de la suite $\{a_n\}$. L'entier n s'appelle l'indice de a_n .

REMARQUE 1. La valeur du premier indice n'est pas importante : on peut avoir suites dont le premier indice est 1, c'ad a_1, a_2, a_3, \dots (comme dans la définition 1), ou bien suites dont le premier indice est 0, c'ad a_0, a_1, a_2, \dots (comme dans l'exemple 1), ou bien suites dont le premier indice est n'importe quel nombre entier positif n_0 fixé, c'ad $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$

¹Ici nous ne considérons pas le problème qui a_n doit représenter le nombre de bactéries, c'ad un nombre entier, tandis que $100/2^n$ n'est pas entier pour $n > 2$

- EXEMPLE 2. (a) $a_n = 1/n$ est le terme général de la suite $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$
 (b) $a_n = c + rn$ (où $c, r \in \mathbb{R}$ sont fixés) est le terme général de la *suite arithmétique de raison* r .
 (c) $a_n = cr^n$ (où $c, r \in \mathbb{R}$ sont fixés) est le terme général de la *suite géométrique de raison* r .

On peut représenter une suite dans un graphe en marquant pour tout n le point d'abscisse n et d'ordonnée a_n . Par exemple, la suite de terme général $1/n$ peut être représentée comme suit :

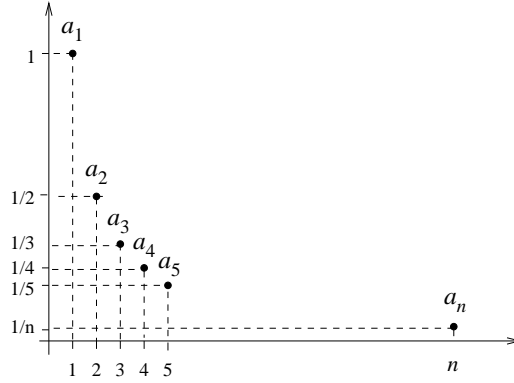


FIG. 1. Représentation graphique de la suite $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$

DÉFINITION 2. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ admet une *limite* (finie) $a \in \mathbb{R}$, et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, si quelque soit le nombre positif ε (choisi aussi petit que l'on veut), il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ qui satisfait la propriété suivante :

$$\text{si } n \geq n_\varepsilon, \text{ alors } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente* (ou *non convergente*).

REMARQUE 2. n_ε dépend de ε .

Illustration de la définition : La figure 2 montre le graphe d'une suite $\{a_n\}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. La définition de convergence vers a signifie que tous les éléments

$$a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \dots$$

sont dans la bande horizontale entre les droites $y = a - \varepsilon$ et $y = a + \varepsilon$.

EXEMPLE 3. (a) Si $a_n = a$ pour tout n , c'ad si $\{a_n\}$ est la suite constante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On doit déterminer un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Comme $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$ pour $n \geq n_\varepsilon$, il suffit de choisir n_ε tel que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, c'ad $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. □

(c) La suite $\{a_n\}$ avec terme général $a_n = (-1)^n$ est non convergente. Tous les termes d'indice pair sont égaux à 1 et tous les termes d'indice impair sont égaux à -1 . Si on choisit n'importe quel $a \geq 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice pair ne vérifient pas

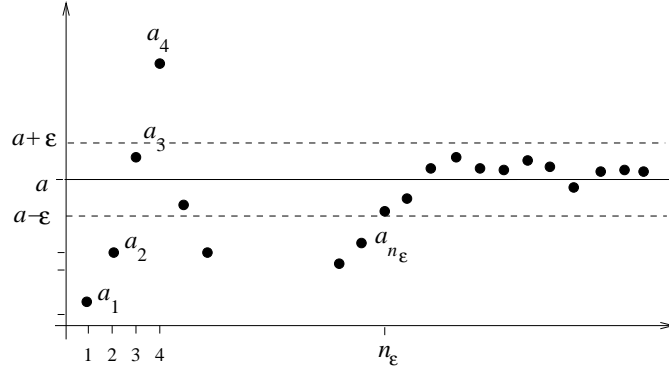


FIG. 2. Suite convergent à a

$|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a - (-1) = a + 1 \geq 1$). Si on choisit n'importe quel $a < 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice impair ne vérifient pas $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a - 1 < -1$, donc $|1 - a| > 1$).

Règles du calcul des limites (pour suites convergentes) :

(1) Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont deux suites convergentes et $c \in \mathbb{R}$, alors

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$,

(d) Si, en outre, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

(2) Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Soit $\{c_n\}$ une troisième suite. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n,$$

alors $\{c_n\}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

(3) Soit $\{a_n\}$ une suite convergente et $c \in \mathbb{R}$.

(a) Si $a_n > c$ pour tout n , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq c$;

(b) Si $a_n < c$ pour tout n , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c$;

(c) Si $a_n \geq c$ pour tout n , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq c$;

(d) Si $a_n \leq c$ pour tout n , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c$.

EXEMPLE 4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2}$.

On remarque que $\frac{2n}{n+2} = \frac{2}{1+\frac{2}{n}}$. Avec $a_n = 2$ (suite constante) et $b_n = 1 + \frac{2}{n}$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 1 + 0 = 1$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

1. Propriétés de convergence

DÉFINITION 3. Une suite $\{a_n\}$ s'appelle

- *croissante*, si $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout n ;
- *décroissante*, si $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n ;
- *monotone*, si elle est soit croissante, soit décroissante.

EXEMPLE 5. (a) Soit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors la suite $\{a_n\}$ est croissante, car

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

(b) Soit $a_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite $\{a_n\}$ est décroissante.

(c) Les suites dans (a) et (b) sont exemples de suites monotones.

DÉFINITION 4. Une suite $\{a_n\}$ est *majorée* lorsque tous ses termes sont inférieurs à un nombre fixe M , càd $a_n \leq M$ pour tout n . On dit que M est un *majorant* de la suite.

Une suite $\{a_n\}$ est *minorée* lorsque tous ses termes sont supérieurs à un nombre fixe m , càd $a_n \geq m$ pour tout n . On dit que m est un *minorant* de la suite.

Une suite est *bornée* lorsqu'elle est minorée et majorée à la fois.

EXEMPLE 6. (1) La suite de terme général $a_n = n$ est minorée par $m = 0$. Elle n'est pas majorée.

(2) La suite de terme général $a_n = (-1)^n$ est bornée, car $-1 \leq a_n \leq 1$ pour tout n .

THÉORÈME 1. (a) *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

(b) *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

(c) *Toute suite monotone et non bornée est divergente.*

EXEMPLE 7. (1) La suite de terme général $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et majorée par $M = 1$. Elle est donc convergente.

(2) La suite de terme général $a_n = \frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par $m = 0$. Elle est donc convergente.

2. Suites divergentes à $\pm\infty$

DÉFINITION 5. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est *divergente à $+\infty$* (ou *a pour limite $+\infty$*), écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, lorsque pour tout $K \in \mathbb{R}$ (suffisamment grand) il existe un indice N_K tel que

$$n \geq N_K \Rightarrow a_n > K.$$

De la même façon, on dit qu'une suite $\{a_n\}$ est *divergente à $-\infty$* (ou *a pour limite $-\infty$*), écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, lorsque pour tout $K \in \mathbb{R}$ (suffisamment négatif) il existe un indice N_K tel que

$$n \geq N_K \Rightarrow a_n < K.$$

EXEMPLE 8. Soit $h \in \mathbb{N}$ fixe. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n^h = +\infty$. Preuve. Pour $K \in \mathbb{R}$ donné, on peut choisir $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $N_K > K$. Si $n \geq N_K$, alors $n^h \geq n \geq N_K > K$.

Règles du calcul pour suites divergentes vers $\pm\infty$:

(1) (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$;

(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $a_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$;

(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $a_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

(2) Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites.

(a) Suppose il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, alors aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, alors aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

(b) Si $\{a_n\}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

EXEMPLE 9. (1) La suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ a limite $+\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) La condition que $a_n > 0$ pour tout n est nécessaire dans (1)(b). Soit par exemple $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mais $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ et donc $\{1/a_n\}$ n'a pas limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Les exemples suivants sont remarquables :

EXEMPLE 10. (1) La suite géométrique de raison r est $\{r^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, r, r^2, r^3, \dots\}$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

(2) Quelques valeurs de la suite de terme général $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sont :

n	1	2	3	4	5	6	100	1000	100000000
a_n	2	2,25	2,37	2,44	2,59	2,59	2,70	2,717	2,71828180

Ces valeurs indiquent que la suite $\{a_n\}$ est croissante. En effet on peut vérifier mathématiquement qu'elle est croissante et majorée, donc convergente. La limite est le nombre e d'Euler :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Suites récurrentes

DÉFINITION 6. Une suite $\{a_n\}$ est appelée *récurrente* si elle définie par la donnée de son premier terme a_0 et par une relation de récurrence

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

où f est une fonction.

EXEMPLE 11. Soit $a_0 = 100$ et $a_{n+1} = 2a_n$ (voir Exemple 1). Ici $f(x) = 2x$ est la fonction qui définit la relation de récurrence.

EXEMPLE 12. Au moyen de la fonction $f(x) = \frac{2}{x}$ on peut construire la suite récurrente

$$a_{n+1} = f(a_n) = \frac{2}{a_n}.$$

Afin que cette suite soit bien définie, il est nécessaire que chaque terme a_{n-1} soit différent de zéro. Pour cela il suffit que le premier terme a_0 est différent de 0. Si par ex. on choisit $a_0 = 1$, alors on a

$$a_1 = \frac{2}{a_0} = 2; \quad a_2 = \frac{2}{a_1} = 1; \quad a_3 = \frac{2}{a_2} = 2; \dots$$

càd

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Pour étudier la convergence d'une suite récurrente, on supposera dans la suite que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait à la propriété suivante :

(P) Si $x_n \in I$ pour tout n et $\{x_n\}$ converge vers $x \in I$, alors $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x)$.

REMARQUE 3. Si f est une fonction continue sur I (voir Ch. ??), alors f satisfait la propriété précédente. Par ex. les fonctions élémentaires a^x , $\log_a x$ et x^a introduites dans le chapitre précédente sont continues sur leurs domaines de définition.

DÉFINITION 7. $a \in \mathbb{R}$ s'appelle un *point fixe* de la suite récurrente $\{a_n\}$ définie par la donnée de son premier terme a_0 et par la relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$.

PROPOSITION 3. On suppose que f satisfait la propriété (P) énoncée précédemment. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par la donnée de a_0 et de la relation $a_{n+1} = f(a_n)$. Si $\{a_n\}$ converge vers a , alors a est un point fixe de $\{a_n\}$, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(a) = a$.

Preuve. Si $\{a_n\}$ converge vers a , alors aussi la suite $\{a_{n+1}\}$ converge vers a . La propriété (P) donne que $f(a_{n+1})$ converge vers $f(a)$. Donc :

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a),$$

d'où $f(a) = a$, c'est-à-dire a est point fixe de $\{a_n\}$. □

EXEMPLE 13. On se donne la suite récurrente $\{a_n\}$ définie par son premier terme $a_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$

La fonction f qui définit la relation de récurrence est $f(x) = \sqrt{2x}$, qui est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

On montre que $\{a_n\}$ est convergente. On prouve d'abord par récurrence¹ que pour tout n on a

$$1 \leq a_n \leq 2. \tag{1}$$

Cette propriété est vraie pour $n = 0$, car $a_0 = 1$. On suppose que a_n satisfait $1 \leq a_n \leq 2$. Alors $1 \leq \sqrt{2 \cdot 1} \leq a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. D'où la propriété est vraie.

On montre maintenant que la suite $\{a_n\}$ est croissante. En effet, d'après (1), on a

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \sqrt{a_n}(2 - \sqrt{a_n}) \geq 1 \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire $a_{n+1} \geq a_n$.

Comme $\{a_n\}$ est croissante et majorée, elle est convergente.

¹Principe de récurrence

Soit P une propriété dépendant de l'entier $n \geq 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

- (i) $P(n_0)$ est vraie;
- (ii) pour tout $n \geq n_0$: $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie;

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Sa limite a est un point fixe de $\{a_n\}$, c'ad une solution de l'équation $x = \sqrt{2x}$. Donc $a = 0$ ou $a = 2$. Comme $a_n \geq 1$ pour tout n , on obtient que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1$. Donc $a \neq 0$, qui entraîne $a = 2$.

Étude de fonctions

Les suites permettent de décrire des modèles discrets, dans lesquels les valeurs de la variable sont observées en temps qui sont multiples d'une unité fixée. Par exemple, la suite $a_n = 100r^n$ de l'exemple 1 du chapitre 2 donne un modèle discret de croissance d'une population de bactéries. Ici a_n est le nombre de bactéries n heures après l'instant initial $n = 0$, et r est le taux de croissance des bactéries.

Avec les fonctions, on peut décrire des modèles continus, dans lesquels les valeurs de la variable sont observées à chaque instant. Par exemple, si on écrit $f(t)$ pour la fonction qui donne le nombre de bactéries au temps t , alors le modèle continu correspondant au modèle discret précédente est $f(t) = 100r^t$.

Pour $r = e$, le graphe de la fonction $f(t) = 100e^t$ est donné ici à droite. Le graphe montre un accroissement illimité du nombre des bactéries. Dans les faits, cependant, l'expérience montre que le nombre de bactéries ne peut pas croître sans limite. Pendant une première phase la croissance de la population suit une courbe de type exponentielle, mais par la suite la courbe doit être modifiée : le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs,...), le nombre de bactéries se stabilise pour atteindre un plateau. Un modèle continu possible pour l'évolution est décrit par la courbe logistique

$$L(t) = \frac{a}{1 + e^{b-ct}} \quad (2)$$

où a , b et c sont paramètres positifs (par exemple, le paramètre a représente le borné supérieur pour le nombre des bactéries qui peuvent vivre dans le milieu donné). Pour comprendre l'évolution de la population de bactéries considérée, il faut connaître le graphe de la courbe logistique. Le but de cet chapitre est de donner les notions mathématiques nécessaires pour tracer le graphe d'une fonction, comme par exemple de L .

Les notions mathématiques que nous allons introduire dans la suite permettent de décrire rigoureusement des propriétés intuitives du graphe d'une fonction.

<u>Intuitivement</u>	<u>Mathématiquement</u>
On décrit le graphe de L sans lever le stylo du papier en lui traçant de $t = 0$ à $t = +\infty$ (le graphe n'a pas de trous).	On dit que L est une fonction continue dans son domaine de définition $[0, +\infty[$.
Le graphe se stabilise pour t aussi grand vers une valeur limite.	La fonction L a une asymptote horizontale pour $t \rightarrow +\infty$.
Le graphe de L n'a pas de coins.	La fonction L est dérivable.
Le graphe est croissant, il n'y a pas de maxima ; il y a un point d'inflexion.	Tous ces propriétés sont décrites mathématiquement par la dérivée de L .

REMARQUE 1. Souvent une fonction est donnée par “un mélange” de fonctions élémentaires connues. Par exemple, la fonction logistique L est constituée de trois fonction différentes :

- la fonction affine $h(t) = b - ct$;
- la fonction exponentielle $g(x) = e^x$;
- la fonction rationnelle $f(y) = \frac{a}{1+y}$.

Si on considère la fonction g évaluée en $h(t)$, on obtient

$$g(h(t)) = g(b - ct) = e^{b-ct}.$$

La fonction $g \circ h$ définie par $(g \circ h)(t) := g(h(t))$ s'appelle la *fonction composée* de h suivi de g . Si ensuite on évalue f en $g(h(t))$, on a

$$(f \circ g \circ h)(t) := f(g(h(t))) = f(e^{b-ct}) = \frac{a}{1 + e^{b-ct}} = L(t).$$

Donc : L est la composée des fonctions h , g et f .

1. Limites d'une fonction

Dans la notion de limite d'une fonction f , ce que nous intéresse c'est le comportement de la fonction au voisinage d'un point x_0 , où x_0 est un point dans ou aux bornes du domaine de définition de f .

EXEMPLE 1. (1) Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, le dénominateur de f étant nul en $x = 0$. Au voisinage de 0 on peut déterminer les valeurs suivantes (on remarque que f est une fonction paire)

x	± 1	$\pm 0,5$	$\pm 0,4$	$\pm 0,3$	$\pm 0,2$	$\pm 0,1$	$\pm 0,001$
$\frac{\sin x}{x}$	0,841	0,959	0,974	0,987	0,993	0,998	0,999

Les valeurs de $f(x)$ deviennent très proches à 1 quand x tend vers 0, qui on suggère que la fonction tend vers 1 pour des valeurs infiniment grandes de x . On écrira : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas définie en $x = 0$. On remarque que f est paire. Au voisinage $x = 0$ on peut déterminer ses valeurs :

x	± 1	$\pm 0,5$	$\pm 0,2$	$\pm 0,1$	$\pm 0,01$	$\pm 0,001$
x^{-2}	1	4	25	100	10000	1000000

Les valeurs de f deviennent de plus en plus grands quand x tend vers 0, ce qui on écrira : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

(3) La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On peut se demander le comportement de $f(x)$ lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes.

x	10	100	1000	10000
$\frac{x}{x+1}$	0,9090	0,9901	0,9990	0,9999

On peu vérifier que les valeurs deviennent très proches de 1. On écrira : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.

(4) Soit $f(x) = x^3$. Le domaine de définition de f est \mathbb{R} . Le tableau suivant donne des valeurs de f pour $x \rightarrow -\infty$:

x	-100	-1000	-10000	-1000000
x^3	-10^4	-10^6	-10^8	-10^{12}

Les valeurs deviennent de plus en plus des grandes en valeur absolue et négatives. On écrira : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

Ces quatre exemples représentent les situations différentes qu'on peut trouver.

Dans la suite on supposera d'avoir fixé une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et un point x_0 dans I ou aux bornes de I . Le point x_0 peut être un nombre réel ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.

1.1. $x_0 \in \mathbb{R}$ et limite finie en x_0 .

DÉFINITION 1. On dit que f admet limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 , et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ (dépendent de ε) tel que

$$x \in I, x \neq x_0, \text{ et } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Interprétation graphique : Voir figure donnée dans le cours.

REMARQUE 2. Seulement les points $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ qui sont différents de x_0 doivent avoir la propriété que $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

EXEMPLE 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Si $\varepsilon > 0$ on a $f(x) = 1 \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ pour tout $x \neq 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Mais $3 = f(1) \notin]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ pour chaque ε tel que $0 < \varepsilon < 2$.

1.2. $x_0 \in \mathbb{R}$ et limite infinie en x_0 .

DÉFINITION 2. On dit que f tends vers $+\infty$ en x_0 , et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, lorsque : pour tout $K > 0$ (suffisamment grand) il y a $\delta > 0$ (dépendent de K) tel que

$$x \in I, x \neq x_0, \text{ et } |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K.$$

Interprétation graphique : Voir figure donnée dans le cours.

REMARQUE 3. Seulement les points $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ qui sont différents de x_0 doivent avoir la propriété que $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

EXEMPLE 3. On montre après la définition que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Soit $K > 0$. Posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Si $|x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, alors $x^2 < \frac{1}{K}$. Donc $\frac{1}{x^2} > K$, ce qui donne l'inégalité à prouver.

1.3. Limite finie en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

DÉFINITION 3. On dit que f admet limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, lorsque : pour tout $\varepsilon > 0$ il y a $K > 0$ (dépendent de ε) tel que

$$x \in I \text{ et } x > K \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

REMARQUE 4. Pour la définition de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ on remplace la condition $x > K$ par $x < -K$.

Interprétation graphique : Voir figure donnée dans le cours.

EXEMPLE 4. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ (petit). On peut supposer que $0 < \varepsilon < 1$. On doit trouver $K > 0$ (dépendet de ε) tel que, si $x > K$, alors $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$. On remarque d'abord que $\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right|$. Posons donc $K = \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Alors $K > 0$ et pour tout $x > K$ on a $\left| \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{k+1} = \varepsilon$.

1.4. Limite infinie en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

DÉFINITION 4. On dit que f tends vers $+\infty$ en $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque : pour tout $K > 0$ (suffisamment grand) il y a $M > 0$ (dépendent de K) tel que

$$x \in I \text{ et } x > M \implies f(x) > K.$$

Interprétation graphique : Voir figure donnée dans le cours.

REMARQUE 5. Les définitions de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ sont obtenues avec les modifications évidentes.

REMARQUE 6. On peut aussi considérer la limite d'une fonction f en x_0 pour des valeurs de x à droite de x_0 , càd dans $]x_0, +\infty[\cap I$, noté $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$; ou bien pour des valeurs de x à gauche de x_0 , càd dans $] -\infty, x_0[\cap I$, noté $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Par exemple, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Notation : " $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ " signifie " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ "; de même, " $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$ " signifie " $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ".

2. Applications : asymptotes

On dit qu'une droite est une asymptote au graphe de la fonction f si "la distance" entre le graphe et l'asymptote tend vers 0 à l'infini. La définition précise est la suivante.

DÉFINITION 5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

(1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point aux bornes de I . Si $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $x = x_0$ est une *asymptote verticale* au graphe de f .

(2) Supposons que $+\infty$ soit aux bornes de I . Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = l$ est une *asymptote horizontale* au graphe de f en $+\infty$.

De même, supposons que $-\infty$ soit aux bornes de I . Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = l$ est une *asymptote horizontale* au graphe de f en $-\infty$.

(3) Supposons que $+\infty$ soit aux bornes de I . Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* au graphe de f en $+\infty$.

De même, supposons que $-\infty$ soit aux bornes de I . Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* au graphe de f en $-\infty$.

EXEMPLE 5. (1) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale au graphe de f . La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale au graphe de f .

(2) Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + x$ est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique au graphe de f , car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2.1. Opérations sur les limites. On suppose que les limites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existent in \mathbb{R} . Alors on a les propriétés suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$;
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} af(x) = a \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

3. Continuité d'une fonction

Intuitivement, une fonction est continue si son graphe n'a pas de trous.

DÉFINITION 6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est *continue en x_0* lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Si f n'est pas continue en x_0 , on dit qu f est *discontinue en x_0* . On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout $x_0 \in I$.

EXEMPLE 6. Le fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est discontinue en $x_0 = 1$, car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq 3 = f(1)$.

PROPOSITION 4. (1) Soient f et g continue en $x_0 \in I$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$ est continue en x_0 ;
- $fg : x \rightarrow f(x)g(x)$ est continue en x_0 ;
- $af : x \rightarrow af(x)$ est continue en x_0 ;
- si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue en x_0 .

(2) Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

4. Dérivabilité d'une fonction

DÉFINITION 7. Une fonction f est dite *dérivable en x_0* si le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0 . On note alors

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

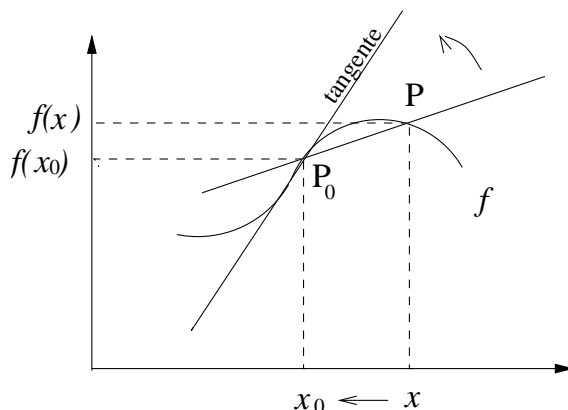
Le nombre $f'(x_0)$ est appelée la *dérivée* de f en x_0 . Elle est parfois aussi notée $(Df)(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Interpretation géométrique de la dérivée en x_0 :

On considère le graphe de f . Soient P_0 et P les points de coordonnées respectives $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. Le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite passant par P_0 et P . Si x tend vers x_0 , le point P se rapproche à P_0 le long le graphe de f et la droite par P_0 et P tend vers une position

limite. La droite limite s'appelle la tangente au graphe du f en x_0 . La dérivée $f'(x_0)$ est la pente de la tangente. La tangente a équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



DÉFINITION 8. Si f est dérivable en chaque élément $x_0 \in I$, on dit que f est *dérivable sur I* . La fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la *dérivée* de la fonction f . Si la fonction f' est elle-même dérivable, sa dérivée s'appelle la *dérivée seconde* de f , notée f'' ou $f^{(2)}$.

EXEMPLE 7. (1) Soit $f(x) = a$ une fonction constante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a - a}{x - x_0} = 0.$$

Donc f est dérivable avec dérivée $f'(x_0) = 0$ pour tout x_0 .

(2) $f(x) = x^2$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 = 2x_0.$$

La fonction dérivée est donc $f'(x) = 2x$. On écrit aussi : $(x^2)' = 2x$.

Plus généralement, on peut montrer : pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et $(x^n)' = nx^{n-1}$. En particuliers $(x^1)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, ...

(3) La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On suppose que $x, x_0 > 0$.

Alors

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x - x_0},$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = -\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Ainsi $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. La fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[$ est donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

PROPOSITION 5. (1) Soient f, g dérivables en x_0 et $a \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions suivantes sont aussi dérivables en x_0 :

- $f + g$, avec $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- fg , avec $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (règle de Leibniz) ;

- af , avec $(af)(x_0) = af(x_0)$;
- si, de plus, $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 , avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

(2) Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 , avec

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

EXEMPLE 8. (1) Soit $f(x) = x^2$. La règle de Leibniz donne $(x^2)' = (xx)' = (x)'x + x(x)' = 2x$, comme déjà obtenu dans l'exemple 6(1).

(2) On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La règle de dérivation du quotient donne

$$f'(x) = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(3) De la formule $(fg)' = f'g + fg'$ on déduit que $(f^2)' = 2f'f$, et généralement, que

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

En particuliers ; pour $f(x) = x$, on obtient :

$$(x^n)' = n(x')x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(4) On a les dérivées suivantes :

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in]0, +\infty[$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x \in]0, +\infty[$$

(5) Comme $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, d'où

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

pour $x \in]0, +\infty[$.

(6) La dérivée de $a^x = e^{x \ln a}$ peut être calculée au moyen de la formule de la dérivée de la fonction composée. En effet, soient $f(x) = x \ln a$ et $g(y) = e^y$. Alors $g(f(x)) = e^{x \ln a}$. Comme $f'(x) = \ln a$ et $g'(y) = e^y$, on obtien :

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = g'(f(x))f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = \ln a a^x.$$

5. Relation entre continuité, dérivabilité et monotonie

DÉFINITION 9. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet en $x_0 \in I$:

- un *maximum absolu* (ou *global*) si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$;
- un *minimum absolu* (ou *global*) si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$;
- un *maximum relatif* (ou *local*) si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in I \cap]a, b[$ où $a < x_0 < b$;
- un *minimum relatif* (ou *local*) si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in I \cap]a, b[$ où $a < x_0 < b$.

Un maximum ou minimum de f s'appelle un *extremum* de f .

EXEMPLE 9.

THÉORÈME 2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Alors f a les propriétés suivantes :

- (1) f est continue sur $[a, b]$;
- (2) f est croissante $\iff f'(x) \geq 0$ pour tout x ;
- (3) f est décroissante $\iff f'(x) \leq 0$ pour tout x ;
- (4) Si f admet un extremum en $x_0 \in]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$;
- (5) f est constante sur $[a, b]$ $\iff f'(x) \equiv 0$ sur $[a, b]$.

REMARQUE 7. (a) f dérivable $\implies f$ continue, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$, mais pas dérivable.

(b) La réciproque de (4) n'est pas vraie : si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$. Donc $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas un extremum en $x = 0$.

EXEMPLE 10. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $a > 0$. On a : $f'(x) = 2ax + b$. Donc

$$f'(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq -b/2a \\ = 0 & \text{si } x = -b/2a \\ \leq 0 & \text{si } x \leq -b/2a \end{cases}$$

En $x = -\frac{b}{2a}$ la fonction f admet le minimum absolu $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Les propriétés de croissance/décroissance de f peuvent être réunies dans le *tableau de variation* de f :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f'		-	+
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		$\frac{4ac - b^2}{4a}$	

6. Convexité et concavité d'une fonction

Une fonction est dite convexe si son graphe a la forme \smile ; une fonction est dite concave si son graphe a la forme \frown . Les définitions précises sont les suivantes.

DÉFINITION 10. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si, pour tout $x_0, x_1 \in I$, la corde P_0P_1 est au dessus de l'arc $\widehat{P_0P_1}$, où $P_0(x_0, f(x_0))$ et $P_1(x_1, f(x_1))$. La fonction f est dite *concave* si $-f$ est convexe.

THÉORÈME 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable (càd il existe f'').

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe ;
- si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave.

DÉFINITION 11. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et soit $x_0 \in I$ pas aux bornes de I . On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 .

EXEMPLE 11. Soit $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. Donc

$$f''(x) \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f	()
f''	-	+
	-∞	+∞

6. Plan d'étude d'une fonction f

Les étapes différents pour l'étude d'une fonction consistent à déterminer :

- (1) Le domaine de définition D_f de f .
- (2) Les symétries éventuelles de f (parité, périodicité, ...).
- (3) Des valeurs particulières de f . Par exemple, $f(0)$ (si $0 \in D_f$), – qui donne l'intersection du graphe de f avec l'axe des ordonnées – et, si possible, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ – qui sont les intersections éventuelles du graphe de f avec l'axe des abscisses –.
- (4) Les limites (ou les valeurs) de f aux bornes de D_f ; les asymptotes.
- (5) La dérivée f' de f et son signe. D'ici on peut déduire la croissance, décroissance et les extrema éventuels de f .
- (6) Le tableau de variation de f (comme résumé des études précédentes).
- (7) La valeur de f dans les extrema éventuels, c'est-à-dire les maxima et minima éventuels de f .
- (8) La dérivée seconde f'' de f et son signe. D'ici on peut déduire la concavité, convexité du graphe de f et les points d'inflexion éventuels.
- (9) La valeur de f en correspondance des points d'inflexion éventuels.
- (10) Enfin, tracer le graphe de f .

8. Exemple : la courbe logistique

La fonction *logistique* est définie par

$$y = L(t) = \frac{a}{1 + e^{b-ct}},$$

où a, b et c sont des paramètres positifs.

- (1) Domaine de définition : $D_L = \mathbb{R}$.
- (2) Pas de symétries particulières.
- (3) $L(0) = \frac{a}{1 + e^b}$ est l'intersection du graphe de L avec l'axe des ordonnées. $L(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, il n'y a pas d'intersection avec l'axe des abscisses.
- (4) Les bornes du domaine de définition sont $-\infty$ et $+\infty$. On remarque que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{b-ct} &= e^b \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ct} = 0; \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{b-ct} &= e^b \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-ct} = +\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = a \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} L(t) = 0.$$

On déduit que :

- (a) la droite $y = a$ est une asymptote horizontale en $+\infty$;
- (b) la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

(5) Dérivée :

$$L'(t) = a \left(\frac{1}{1 + e^{b-ct}} \right)' = a \frac{-(1 + e^{b-ct})'}{(1 + e^{b-ct})^2} = ac \frac{e^{b-ct}}{(1 + e^{b-ct})^2} > 0$$

car $ac > 0$. Donc : $L(t)$ est toujours croissante et il n'y a pas d'extrema.

Remarque. $L(t)$ n'est pas seulement croissante, mais aussi *strictement croissante* sur \mathbb{R} , c.à.d. $L(t_2) > L(t_1)$ pour $t_2 > t_1$. En effet, on sait qu'elle est croissante (car la condition $L'(t) \geq 0$ est satisfaite). Si L n'est pas strictement croissante, alors il existe un intervalle I tel que $L(t) \equiv \text{constante}$ pour tous $t \in I$. Mais alors $L'(t) \equiv 0$ sur I , en contradiction avec le fait que $L'(t) > 0$.

(6) Tableau de variation de L :

t	$-\infty$	$+\infty$
L'	+	
L	0	↗ a

(7) Dérivée seconde : On remarque que

$$\begin{aligned} L'(t) &= c \frac{a}{1 + e^{b-ct}} \frac{e^{b-ct}}{1 + e^{b-ct}} \\ &= c L(t) \left(1 - \frac{a}{1 + e^{b-ct}} \right) \\ &= c L(t) \left(1 - \frac{L(t)}{a} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} L''(t) &= c L'(t) \left(1 - \frac{L(t)}{a} \right) + c L(t) \left(1 - \frac{L(t)}{a} \right)' \\ &= c L'(t) \left(1 - \frac{L(t)}{a} \right) - c \frac{L(t)L'(t)}{a} \\ &= c L'(t) \left(1 - \frac{2L(t)}{a} \right). \end{aligned}$$

Comme $c > 0$ et $L'(t) > 0$, on obtient :

$$L''(t) > 0 \iff 1 - \frac{2L(t)}{a} > 0 \iff L(t) < \frac{a}{2}.$$

On a d'une côté $L(0) = \frac{a}{1 + e^b} < \frac{a}{2}$ car $e^b > 1$ comme $b > 0$; d'autre côté, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = a$. Comme $L(t)$ est continue et strictement croissant, il doit exister une valeur $t_0 > 0$ (et une seule) telle que $L(t_0) = a/2$. On obtient :

$$L''(t) \begin{cases} > 0 & \text{pour } t < t_0 \\ = 0 & \text{pour } t = t_0 \\ < 0 & \text{pour } t > t_0 \end{cases}.$$

D'où $t = t_0$ est point d'inflexion, $L(t)$ est convexe sur $] - \infty, t_0[$ et concave sur $]t_0, +\infty[$.

La valeur de L dans le point d'inflexion est $L(t_0) = a/2$.

(8) Graphe de L : Voir figure donnée dans le cours.

On rappelle que $L(t)$ donne le nombre d'individus au temps t dans la population étudiée (par exemple une population de bactéries). On déduit l'interprétation suivante pour les constantes a , b et c dans la formule de L :

- a est le borné supérieur pour le nombre d'individus de la population dans le milieu considéré;
- b est lié à la population initiale $L(0)$ par la relation $L(0) = \frac{a}{1 + e^b}$. D'où $e^b = \frac{a}{L(0)} - 1$,
ou $b = \ln\left(\frac{a}{L(0)} - 1\right)$.
- c est liée au taux de reproduction de la population considérée.

CHAPITRE 4

Intégration

DÉFINITION 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On dit qu'une fonction $F' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I lorsque

- (1) F est dérivable sur I ;
- (2) $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

REMARQUE 1. Si F est une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$ est la fonction constante, alors $F + C$ est dérivable et $(F + C)' = F' + C' = F' = f$, càd aussi $F + C$ est primitive de f .

DÉFINITION 2. On dit que f est *intégrable* s'elle admet une primitive. Dans ce cas on note $\int f(x) dx$ l'une quelconque des primitives de f , définie à une constant près que l'on écrit toujours explicitement. $\int f(x) dx$ s'appelle l'*intégrale indéfinie* de f .

EXEMPLE 1. Soit $f(x) = x^2$. Alors $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de F car f est dérivable et $(\frac{1}{3}x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$. D'où

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, soit $n = 1, 2, 3, \dots$. Une primitive de $f(x) = x^n$ est $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, d'où

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION 3. Soit F une primitive de f sur I et soit $[a, b]$ une partie de I . L'*intégrale définie* de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x) dx$, est donné par

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

On utilise la notation $[F(x)]_a^b$ pour $F(b) - F(a)$.

EXEMPLE 2.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Interprétation géométrique de l'intégrale définie de f :

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire de la surface limitée par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. Voir figure 1.

Si f prend des valeurs négatives, l'aire est affectée du signe moins sur les intervalles où $f < 0$.

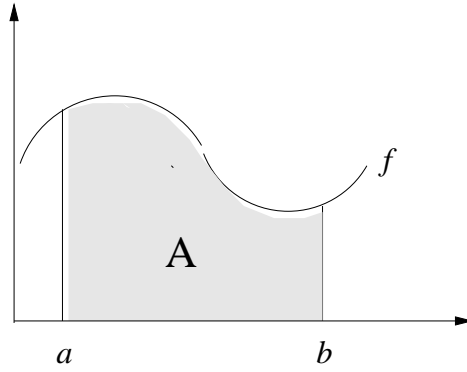


FIG. 1. $\int_a^b f(x) dx = \text{aire de la surface A}$

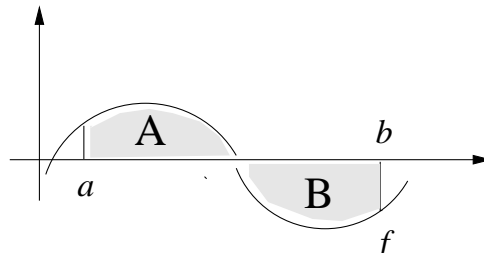


FIG. 2. $\int_a^b f(x) dx = (\text{aire de la surface A}) - (\text{aire de la surface B})$

0.1. Règles du calcul.

(1) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(2) (Intégration par parties)

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

(3) (Changement de variable)

$$\int_a^b g(f(x))f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Preuve. Soient F et G primitives de f et g respectivement. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ car $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$. Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx &= [\lambda F(x) + \mu G(x)]_a^b \\ &= \lambda [F(x)]_a^b + \mu [G(x)]_a^b \\ &= \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Pour prouver (2), on rappelle la règle de Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$, qui donne avec (1) :

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (f(x)g(x))' dx \\ &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx, \end{aligned}$$

d'où (2).

Enfin, pour (3), soit G une primitive de g . La dérivée de la fonction composée donne

$$[G(f(x))]' = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) dx &= \int_a^b G'(f(x)) \cdot f'(x) dx \\ &= \int_a^b [G(f(x))]' dx \\ &= [G(f(x))]_a^b \\ &= G(f(b)) - G(f(a)) \\ &= [G(y)]_{f(a)}^{f(b)} \\ &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 3. (1) D'après (1) on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + x) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

(2) Comme $(x)' = 1$, on peut utiliser (2) pour calculer :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln x dx \\ &= \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx \\ &= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \\ &= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e 1 dx \\ &= e - 0 - [x]_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

- (3) On détermine $\int_0^2 x e^{x^2} dx$ en utilisant (3). On remarque que $e^{x^2} = g(f(x))$ avec $g(y) = e^y$ et $f(x) = x^2$. On a $f'(x) = 2x$; en outre, $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} \cdot (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^y dy \\ &= \frac{1}{2} [e^y]_0^4 \\ &= \frac{1}{2} (e^4 - 1).\end{aligned}$$

Bibliographie

- [BB] Jean-Paul et Françoise Bertrandias, *Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé*, Presses universitaires de Grenoble, 1997
- [Le] Bernard Legras, *Éléments de statistique à l'usage des étudiants en médecine et en biologie : cours et exercices corrigés*, Editeur Ellipses-marketing, 1998.
- [Bo] E. Bohl, *Mathematik in der Biologie*, 2. Auflage, Springer-Verlag, 2001.