Feuille de TD n^0 1 : Intégration

Exercice 1 (a) Montrer que $\ln|x|$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

(b) Soient a et b deux constantes fixées avec $a \neq 0$. Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{ax+b}$ sur son domaine de définition.

Exercice 2 Déterminer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+x^{3/2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx\,,\qquad \int\frac{x^5+1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx\,,\qquad \int(e^{3x}-e^{-x})\,dx\,.$$

Exercice 3 Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Pour toutes fonctions $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$ on a $\int_a^b[f(x)g(x)]\,dx=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.

(b) Pour toute fonction $f:[a;b]\to]0;+\infty[$ on a $\int_a^b\sqrt{f(x)}\,dx=\sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$.

(c) Si $f(x)\geq g(x)$ pour tout $x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$.

(d) $\int_{-5}^5 x^2\,dx=2\int_0^5 x^2\,dx$.

(e) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2+x^4}\,dx=-\frac{2}{5}$.

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^1 e^x\sin(e^x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$ 4) $\displaystyle\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}\,dx$ Indication : Montrer que $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{1-\sin^2 x}$

6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{1-x^2}\,dx$ Indication : Trouver des constantes A et B telles que $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{1+x}$

7) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$ Indication : Effectuer la substitution $x=a\sin\theta$

Exercice 5 Si $x'(t)$ est le taux de croissance d'un enfant, qu'est-ce que représente $\int_5^{10}x'(t)\,dt$?

Exercice 6 Calculer l'aire de la surface limitée par :

(a) l'axe des ordonnées, la droite $y=1$ et la courbe $y=x^{1/4}$;

(b) la courbe $y=2x-x^2$ et la droite $y=-x$.

Exercice 7 Déterminer par intégration le volume d'une sphère de rayon r.

Exercice 8 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe $y=x-x^2$ et l'axe des abscisses autour de : 1) l'axe de abscisses ; 2) l'axe des ordonnées.

Exercice 9 On suppose que $W(t)$ dénote la quantité de matériel radioactive après le temps t (en seconds) et que $W'(t)=-2W(t)$. Combien de matériel reste après 2 seconds si $W(0)=15$ g ? Quelle est la demi-vie du matériel consideré ?

Exercice 10 On considère les modèles de croissance d'une population donnés par les hypothèses de base suivantes :

1) (modèle de von Bertalanffy) Pendant un petit intervalle de temps Δt, la variation ΔN du nombre N d'individus de la population est donné par $\Delta N=K(N_\infty-N)\Delta t$, où K et N_* sont des constantes et $N_*>0$.

2) (modèle logistique) Pendant un petit intervalle de temps Δt, la variation ΔN du nombre N d'individus de la population est donné par $\Delta N=\gamma N(N_*-N)\Delta t$, où γ et N_* sont des constantes et $N_*>0$.

Déterminer les équations différentielles correspondantes à ces modèles, et les résoudre.