Mathématiques L2 SV

Feuille de TD n^0 2 : Intégrales impropres et nombres complexes

Exercice 1 Calculer, si possible, les intégrales impropres suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \ln x \, dx\,, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx,$$

Exercice 2 La durée de vie moyenne (ou espérance mathématique) d'un atome radioactif est donnée par

$$-k \int_0^{+\infty} t e^{kt} \, dt$$

où k est une constante négative liée à la demi-vie de la substance radioactive considérée.

Pour le carbone radioactive C^{14} on a $k = -0,000121$. Déterminer la vie moyenne d'un atome de C^{14} .

Exercice 3 La vitesse moyenne des molécules d'un gaz parfait est

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} \, dv\,,$$

où M est le poids moléculaire du gaz (en kg(kmole)$^{-1}$), R est la constante des gaz parfaits, T est la température absolue (en kelvin) et v est sa vitesse moléculaire (en ms^{-1}). Montrer que

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,.$$

Exercice 4 Si f est une fonction continue, définie sur $[0, +\infty[$, on appelle transformée de Laplace de f la fonction :

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

et le domaine de définition de $\mathcal{L}f$ est l'ensemble de nombres $s \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale est convergente. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \sin t$.

Exercice 5 Soient $z = 1 - 3i$, $w = -2 + 5i$ et $u = -3 - 4i$. Déterminer la forme algébriques des nombres complexes suivants :

$$z + w \qquad zw\,, \qquad \frac{z}{u}\,, \qquad \frac{zw}{z+w}\,, \qquad zwu\,.$$

Exercice 6 Soient $z = \sqrt{3} - i$ et $w = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) Déterminer la forme trigonométrique de z et w .

(b) Déterminer la forme algébrique de w^{10}.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $4x^2 + 9 = 0$;

(b) $x^2 + x + 2 = 0$;

(c) $x^4 = 1$.

Exercice 8 Déterminer les nombres complexes z qui satisfont les équations suivantes :

(a) $\frac{z-2}{z+i} = 3 + i$;

(b) $z^2 - 3 = \overline{z - 2}$.