

Examen du 25 janvier 2007

Durée 1h. Les calculatrices sont autorisées. Le seul document autorisé est un formulaire manuscrit format A4 recto-verso. Les exercices sont indépendants. Justifier les réponses données. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. [4 pts] _____

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} dx.$$

Exercice 2. [7 pts] _____

Les noyaux de certains atomes possèdent un moment magnétique nucléaire : sous l'action d'un champ magnétique statique, les différents vecteurs moment magnétique s'orientent parallèlement à ce champ. Un modèle pour le changement de magnétisation m en fonction du temps t est donné par l'équation différentielle

$$m'(t) = \alpha M \left(1 - \frac{m(t)^2}{M^2} \right), \quad (*)$$

où α et M sont des constantes positives. Initialement les atomes sont arbitrairement ordonnés, d'où $m(0) = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (*) et montrer que la solution qui satisfait la condition $m(0) = 0$ est la fonction

$$m(t) = M \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1}.$$

Exercice 3. [3 pts] _____

Déterminer les nombres complexes z pour lesquels z^3 est un nombre réel.

Exercice 4. _____

Trois aliments a_1 , a_2 et a_3 contiennent les quantités de vitamines A , B , C et D données par la matrice V ci-dessous (les valeurs sont en unité de vitamine par gramme d'aliment) :

$$V = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

Dans un repas, deux patientes M et N ont les consommations (en grammes) de a_1 , a_2 et a_3 suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 200 & 100 & 100 \\ 100 & 150 & 150 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ N \end{matrix}$$

Les aliments a_1 et a_2 coûtent 6 euros/kg et l'aliment a_3 coûte 12 euros/kg.

- (1) [2 pts] Déterminer les quantités de vitamines contenues dans les repas de M et N .
- (2) [1 pt] Calculer le coût des deux repas.
- (3) [3 pts] Avec la composition des repas ci-dessus, de combien faudra-t-il modifier le coût des aliments a_1 et a_2 (en laissant a_3 à 12 euros/kg) pour que le coût des repas de M et N soit exactement de 3 euros chacun ?