Feuille de TD n^0 1 : Intégration

Exercice 1 Déterminer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)\,dx\,,\qquad \int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)\,dx\,,$$
$$\int\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\,dx\,,\qquad \int\frac{x}{1+x}\,dx\,.$$

Exercice 2 On rappelle qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$; elle est dite impaire si $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Soit $a>0$ fixé et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction donnée. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$.
2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\cos x e^{\sin x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_4^9\frac{2}{x-3}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2/2}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^1\sin^2 x\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x-x^2}\,dx$ Indication : Trouver des constantes A et B telles que $\displaystyle\frac{1}{x-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{x}$

Exercice 4 Calculer l'aire de la surface limitée par :

(a) la courbe $y=e^x$ et les droites $y=-x$, $x=2$ et $x=0$;
(b) la courbe $y=\sqrt{x}$, la droite $y=x-2$ et l'axe des abscisses.

Exercice 5 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe $y=x^3$, la droite $y=1$ et l'axe des ordonnées autour de : 1) l'axe des ordonnées ; 2) l'axe des abscisses.

Exercice 6 Une particule en mouvement avance le long de l'axe des abscisses à la vitesse

$$v(t)=-(t-2)^2+1\quad\text{pour } 0\le t\le 5\,.$$

On suppose que la particule se trouve dans l'origine 0 au temps $t=0$.

(a) Tracer le graphe de $v(t)$ comme fonction de t ; en déduire les intervalles de temps pendant lesquelles la particule se déplace à gauche ou à droite.
(b) Déterminer la position $s(t)$ de la particule au temps $0\le t\le 5$.
(c) Donner une interprétation de $s(t)$ à partir du graphe de $v(t)$.
(d) Tracer le graphe de $s(t)$ comme fonction de t

Exercice 7 On considère les modèles de croissance d'une population donnés par les hypothèses de base suivantes :

1) (modèle de von Bertalanffy) Pendant un petit intervalle de temps Δt, la variation ΔN du nombre N d'individus de la population est donné par $\Delta N=K(N_\infty-N)\Delta t$, où K et N_* sont des constantes et $N_*>0$.

2) (modèle logistique) Pendant un petit intervalle de temps Δt, la variation ΔN du nombre N d'individus de la population est donné par $\Delta N=\gamma N(N_*-N)\Delta t$, où γ et N_* sont des constantes et $N_*>0$.

Déterminer les équations différentielles correspondantes à ces modèles, et les résoudre.