Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2006-2007

Mathématiques (L2)

Feuille de TD n^0 3 : Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 Un technicien doit administrer à un animal de laboratoire deux repas principaux par jour. Il dispose de trois produits $P1$, $P2$ et $P3$. La quantité (en grammes) de protéines et de matières grasses dans une portion de 30 g des trois produits est donnée dans le tableau suivant :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{prot.} & \text{gras} \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc} 7 & 3 \\ 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} \end{array}$$

Chaque repas pése au total 30 g, dans les proportions de chacun de ces produits indiquées par la matrice B :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{P1} & \text{P2} & \text{P3} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{repas1} \\ \text{repas2} \end{array} \end{array}$$

(a) Interpréter la valeur de $a_{2,1}$ dans le contexte donné.
(b) Interpréter la valeur de $b_{1,3}$ dans le contexte donné.
(c) Que répresente la deuxieme ligne de la matrice B ?
(d) Calculer le produit matriciel BA et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.
(e) Calculer le produit matriciel AB et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.

Exercice 2 (Extrait de l'examen de septembre 2004) Dans un test clinique d'un nouveau médicament contre l'herpès, les patients examinés ont été divisés en trois groupes : patients avec le syndrome débutant, patients avec syndrome avancé et patients rétablis. Au début le groupe comprend 20% de patients avec un syndrome débutant et 80% de patients avec un syndrome avancé. La matrice des probabilités de transition

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

décrit comment la composition de patients du groupe change de semaine en semaine.

(a) Tracer le diagramme des probabilités de transition.
(b) Calculer la composition du groupe de patients après 1 semaine et après 2 semaines.
(c) Dans ce modèle un patient rétabli peut-il être affecté de nouveau par le syndrome ? Expliquer votre réponse.

Exercice 3 (Extrait de l'examen de septembre 2005) Dans un test clinique d'un nouveau médicament, les patients étudiés ont été répartis en 3 groupes selon

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rl} x_1 = & \text{pourcentage de patients en phase initiale de la maladie} \\ x_2 = & \text{pourcentage de patients en phase avancée de la maladie} \\ x_3 = & \text{pourcentage de patients guéris} \end{array}$$

Au début, le groupe de patients était formé par 20% de patients en phase initiale de la maladie et 80% de patients en phase avancée de la maladie. On note X_0 le vecteur donnant la distribution initiale de patients. La matrice des probabilités de transition

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

décrit l'évolution de semaine en semaine de la maladie entre les patients étudiés.

(a) Tracer le diagramme des probabilités de transition.

(b) Dans ce modèle, est-ce que un patient guéri peut retomber malade ?

(c) Calculer la distribution du groupe de patients après une semaine et après deux semaines.

(d) Dans ce modèle, est-ce que un patient guéri peut retomber malade ?

(e) Montrer qu'il existe des nombres réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$MY_1 = \lambda_1 Y_1, \qquad MY_2 = \lambda_2 Y_2, \qquad \text{et} \qquad MY_3 = \lambda_3 Y_3,$$

où

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad Y_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(f) Montrer qu'il existe des nombres réels α, β, γ tels que $X_0 = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3$.

(g) Montrer que le vecteur X_n de distribution des patients après n semaines est donné par

$$X_n = \alpha \lambda_1^n Y_1 + \beta \lambda_2^n Y_2 + \gamma \lambda_3^n Y_3\,.$$

(h) Montrer que après 10 semaines 90, 6% des patients ont guéri.

Exercice 4 (Extrait de l'examen de janvier 2004) En utilisant un système d'équations linéaires, équilibrer la réaction chimique

$$\mathrm{Al(OH)_3} + \mathrm{H_2SO_4} \longrightarrow \mathrm{Al_2(SO_4)_3} + \mathrm{H_2O}\,.$$

Exercice 5 Une portion de 100 g de pommes de terre contient 100 calories et 5 g de protéines et coûte 0,4 euros ; une portion de 100 g de maïs contient 150 calories et 10 g de protéines et coûte 0,2 euros ; une portion de 100 g de bœuf haché contient 300 calories et 25 g de protéines et coûte 0,6 euros. Vous pouvez choisir de préparer :

(a) un repas contenant 800 calories et 50 g de protéines ;

(b) un repas contenant 600 calories et 60 g de protéines.

Quelle est la combinaison la moins chère ?

Exercice 6 (Extrait de l'examen de septembre 2006) Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel u le système d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & & & + & 2z & = & 4+u \end{array} \right.$$