

Feuille de TD n^0 1. Fonctions élémentaires

Exercice 1 Selon le loi de refroidissement de Newton, le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu. On peut dériver cette loi d'après une décroissance exponentielle : Si $T(t)$ est la température du corps au temps t sec, alors

$$T(t) = T_{\text{env}} + (T(0) - T_{\text{env}})\ e^{-rt}$$

où T_{env} est la température du milieu et r est une constante positive.

(a) Déterminer la température au temps $t = 20$ sec si la température du corps au temps $t = 0$ sec vaut 100^{o}C, en supposant que la valeur de r est 10^{-2}sec^{-1} et que le milieu se trouve a une température de 10^{o}C.

(b) On suppose toujours que la température du milieu est de 10^{o}C. Déterminer la valeur de r si $T(0) = 60^o$C et, en outre, $T = 16,5^oC$ au temps $t = 90$ sec.

(c) Est-ce qu'il est possible, selon cette loi, que la différence entre la température du corps et celle du milieu reste constante pour un certain interval de temps ?

(d) Montrer que si le corps a une température initiale supérieure à celle du milieu, alors sa tempérure restera toujours supérieure à celle du milieu. Qu'est-ce qu'on peut dire dans le cas où la température du corps est initialement inférieure à celle du milieu ?

(e) Utiliser la loi de Newton pour déterminer la température du milieu en fonction du temps t est des températures $T(t)$ et $T(0)$.

Exercice 2 Déterminer la valeur de la variable x dans les équations suivantes :

(a) $\log_2 x = 3$;

(b) $\log(x-1) + \log(x+1) = 2\log(x+2)$;

(c) $10^{1/x} = 1000$;

(d) $3^{2x-1} = 7^{x+2}$.

Exercice 3 Déterminer le domaine maximal de définition des fonctions suivantes. En outre, déterminer si elles sont paires, impaires ou bien ni paires, ni impaires.

$$x^5\,, \qquad 5x^{1/2}\,, \qquad e^x + e^{-x}\,, \qquad \frac{\sin x}{x}\,, \qquad \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad \sqrt{9-x^2}.$$

Exercice 4 Selon la formule de Du Bois, utilisée surtout en diététique, la surface corporelle S (en cm^2) est liée au poids P (en kg) et à la taille T (en cm) par la formule [1]

$$S = 71,84\, T^{0,725}\, P^{0,425}$$

(a) Calculez votre surface corporelle.

(b) Ecrire T comme fonction de P et de S.

[1] voir J.-P. et F.Bentrandias, Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé, Presses Universitaires de Grenoble, 1997, page 209

Exercice 5 (a) Tracer le graphe des fonctions exponentielles $y = 4 \cdot 10^x$ et $y = 3e^{-2x}$ en coordonnées semi-logarithmiques (X, Y), où $X = x$ et $Y = \log y$.

(b) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction exponentielle $y = C10^{ax}$ en coordonnées semi-logarithmiques (X, Y), avec $X = x$ et $Y = \log y$, en supposant que $a > 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

(c) Tracer le graphe de la fonction puissance $y = 2x^{-3}$ en coordonnées logarithmiques (X, Y), où $X = \log x$ et $Y = \log y$.

(d) Soient $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction puissance $y = Cx^a$ en coordonnées logarithmiques (X, Y), avec $X = \log x$ et $Y = \log y$, en supposant que $a < 0$. Interpréter graphiquement les constantes C et a.

Exercice 6 Dans l'étude d'une culture bactérienne, le nombre de bactéries N est liée au temps de mesurement t (en heures) par une relation de type exponentielle. Déterminer cette relation si :

(a) en coordonnées semi-logarithmiques népériennes ($X = t, Y = \ln N$), la relation est décrite par l'équation $Y = 2X + a$, où a est une constante ;

(b) Le nombre de bactéries au temps $t = 0$ est $N(0) = 1000$.

Exercice 7 La masse y (en g) des feuilles d'un arbre est liée au diamètre à la base x (en cm) de son tronc par une relation $y = Cx^k$ où C et k sont des constantes positives. Déterminer C et k en sachant que :

(a) en coordonnées logarithmiques ($X = \log x, Y = \log y$), la relation est décrite par une droite de pente 1,8 ;

(b) une masse de 500 g correspond à un diamètre de 5 cm.