Université Paul Verlaine – Metz
Mathématiques L1 – SV

Année universitaire 2007–2008

Feuille de TD n^0 2. Suites

Exercice 1 Soit $\{a_n\}$ la suite numérique définie par $a_0 = 1$, et, pour tout entier $n \geq 1$, par $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}+3$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la suite $\{b_n\}$ par $b_n = a_{n+1} - a_n$.

(a) Monter que, pour tout n, on a $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$.

(b) En déduire la nature de la suite $\{b_n\}$ et préciser son premier terme.

(c) Exprimer b_n en fonction de n.

(d) En déduire que, pour tout n, on a $a_n = -3(1/2)^n + 4$.

(e) Evaluer les 10 premières termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = (1/2)^n$, et faire une hypothèse sur sa limite. Vérifier l'hypothèse faite.

(f) Déterminer le sens de variation de la suite $\{a_n\}$ et sa limite.

Exercice 2 Soit $\{u_n\}$ une suite à termes positifs et on définit la suite $\{v_n\}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

(a) Vérifier que $v_n \in]0,1[$ pour tout n ;

(b) Montrer que la suite $\{u_n\}$ est convergente si et seulement si la suite $\{v_n\}$ est convergente et $\lim v_n \neq 1$..

(c) Montrer que la suite $\{u_n\}$ est (dé)croissante si et seulement si la suite $\{v_n\}$ est (dé)croissante.

Exercice 3 Soit $\{r^n\}$ la suite géométrique de raison r. Prouver que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1\,, \\ 1 & \text{si } r = 1\,, \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1\,. \end{cases}$$

Exercice 4 La digitale pourpre (Digitalis purpurea) est une variété végétale bisannuelle. Dans sa première année, une plante ne fleurit pas. Dans la deuxième année, la plante fleurit, produit de graines et meurt. Les graines d'une plante fournissent en moyenne deux nouvelles plantes dans le nouvel an. Une plante a 60% de chance de survie à l'hiver. Soient p_n et q_n respectivement les nombres de plantes florissantes et de plantes non florissantes au cours de la n-ième année. On pose $t_n = p_n/q_n$.

(a) Établir une relation récurrente pour la suite des t_n.

(b) Une suite $\{a_n\}$ est dite périodique de période k lorsque $a_{n+k} = a_n$ pour tout n. Montrer que pour toute valeur initiale t_0, la suite des t_n est périodique de période 2.

(c) Déterminer les éventuels points fixes de la suite $\{t_n\}$.

Référence : M. de Gee, Wiskunde in Werking, Epsilon Uitgaven, 2002.

Exercice 5 Nous considérons la suite récurrente $t_{n+1} = rt_n + b$ comme modèle pour la croissance d'une population.

(a) Prenons d'abord $b = 0$, donc $t_{n+1} = rt_n$. Quelle est l'interprétation biologique de r ?

(b) Comment se comporte une suite récurrente $t_{n+1} = rt_n + b$ avec $r = 1$?

(c) Monter que si $r > 1$ et $b < 0$, alors la suite récurrente admet un point fixe et le calculer.

Parfois dans un environnement non naturel, les circonstances ne sont pas assez bonnes pour mantenir la population à un niveau constant : on a alors $0 < r < 1$. Ceci arrive souvent par exemple dans les aquariums.

(a) Formuler une relation récurrente pour la population d'un aquarium dans lequel annuellement la moitié des poissons meurt et 20 nouveaux poissons sont ajoutés.

(b) Calculer les points fixes éventuels de la suite correspondante.

Référence : M. de Gee, Wiskunde in Werking, Epsilon Uitgaven, 2002.

Exercice 6 Pour certaines espèces d'insectes évoluant par cycle de reproduction annuel, l'évolution générale est caractérisée par une suite $\{a_n\}$ des nombres d'individus adultes à chaque génération. Une hypothèse simple d'évolution est que le nombre d'insectes à un instant donné ne dépend que du nombre d'insectes à la génération précédente. Le suite soit donnée par récurrence par

$$a_{n+1} = Ca_n\Big(1 - \frac{a_n}{L}\Big), \tag{1}$$

où $C > 0$ est un coefficient de reproduction et L le nombre maximum d'insectes pouvant vivre dans la milieu étudié. On peut montrer que la valeur de a_n est positive et reste inférieure à L si $0 < C < 4$. On suppose que $L = 1000$ et que la population initiale est $a_0 = 330$.

(a) Calculer les valeurs de a_n pour n de 1 à 16 si $C = 0{,}8$ ou $C = 2{,}6$ (dans les listes remplacer a_n par l'entier le plus proche).

(b) Montrer que les seules limites possibles de la suite $\{a_n\}$ sont $a = 0$ ou $a = L(1 - 1/C)$.

(c) On suppose que le coefficient de reproduction est faible, c'est-à-dire $C < 1$. Montrer que la suite $\{a_n\}$ est décroissante et que sa limite est 0 (il y a extinction de la population).

Référence : [B2], page 249.

Exercice 7 (extrait de l'examen de janvier 2004) Dans le modèle de Ricker discret pour la croissance d'une population le nombre P_{n+1} d'individus au temps $n + 1$ est lié au nombre P_n d'individus au temps n par la relation

$$P_{n+1} = aP_n e^{-bP_n},$$

où a et b sont des constantes telles que $a > 1$ et $b > 0$.

(a) Vérifier que la suite $\{P_n\}$ est croissante si et seulement si $P_n \leq \frac{\ln a}{b}$ pour tout n.

(b) On suppose que $\{P_n\}$ est convergente. Soit $P = \lim_{n\to\infty} P_n$. Déterminer les valeurs possibles de P.

Exercice 8 On considére la suite récurrente

$$a_{n+1} = a_n^2 \qquad \text{avec} \qquad a_0 > 0.$$

(a) Montrer les propriétés suivantes :

  (a) Si $a_0 = 1$, alors la suite $\{a_n\}$ est constante ;

  (b) Si $0 < a_0 < 1$, alors $0 < a_n < 1$ pour tout n et la suite $\{a_n\}$ est strictement décroissante ;

  (c) Si $a_0 > 1$, alors $a_n > 1$ pour tout n et la suite $\{a_n\}$ est strictement croissante.

(b) Déterminer les éventuels points fixes de la suite en fonction de la valeur initiale a_0.

Exercice 9* Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

(a) $\lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\big)$

(b) $\lim_{n\to\infty} (3^{-n} - 4^{-n})$

(c) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n 3^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n 3^{-n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n + 3^{-n}}{n}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n + 1}$

L'exercice marqué par un * est facultatif