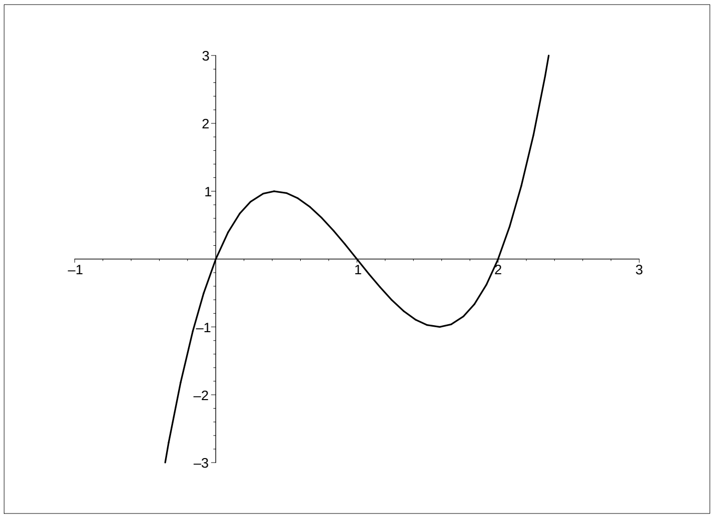
Feuille de TD n^0 3. Études de fonction

Exercice 1 Pour la fonction $f(x)$ dont le graphique est donné ci-dessous, tracer une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+2$, $f(x+2)$, $f(2x)$, $f(x/2)$ et $1/f(x)$.

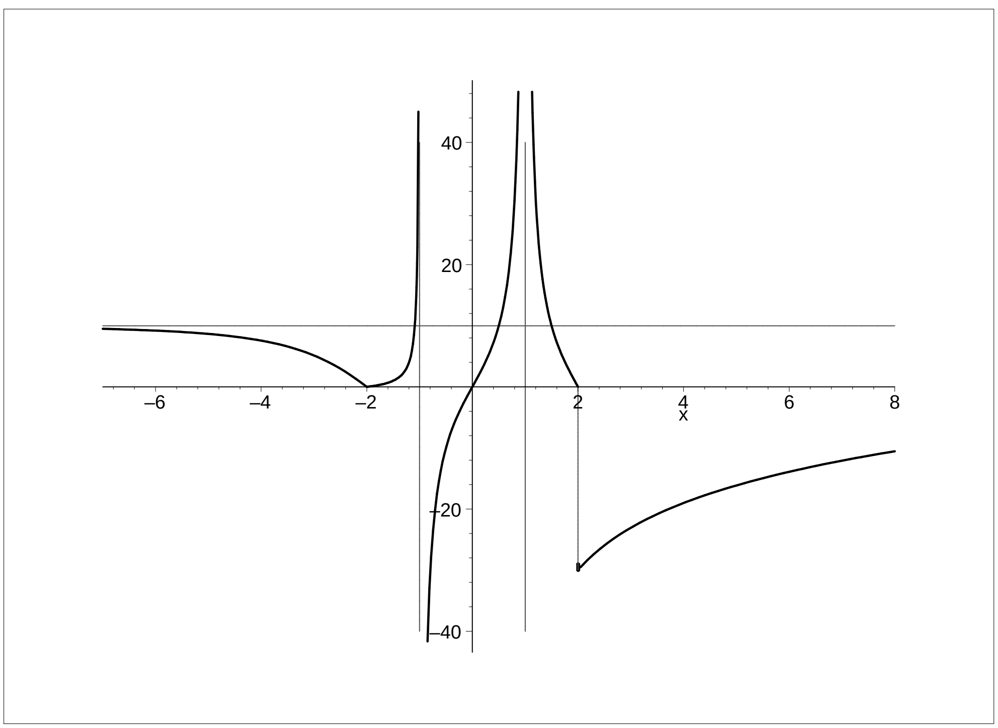


Exercice 2 Pour la fonction $g(x)$ dont le graphe est reproduit ci-dessous :

(a) Déterminer $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 2^-} g(x)$.

(b) Écrire les équations des asymptotes éventuelles.

(c) Est-ce que g est continue en $x=-2$ et en $x=2$?



Exercice 3 (a) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5^x+2^x}{e^x}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x^3+2x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}, \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$$

(b) En sachant que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{3x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

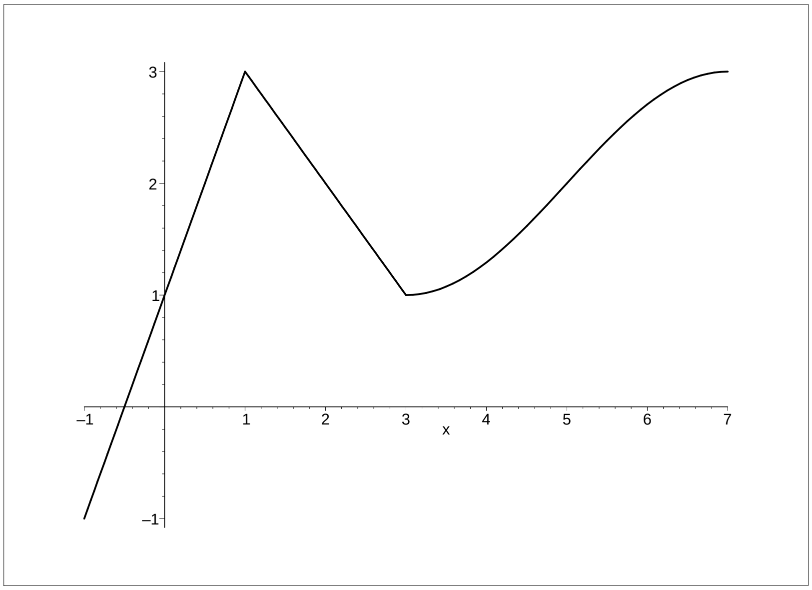
Exercice 4 Soient $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = e^x$.

(a) Déterminer $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ g$ et $h \circ g \circ f$.

(b) Calculer la dérivée des fonctions dans (a).

Exercice 5 (a) Déterminer la pente de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = 2x^2 - 2$ en $x = 1$. Écrire l'équation de cette tangente.

(b) Tracer une esquisse du graphe de la dérivée de la fonction représentée ci-dessous.



Exercice 6 (extrait de l'examen blanc de decembre 2003) Lorsqu'un médicament est injecté dans le sang, sa concentration y (en mg/litre) après t minutes est donnée par

$$y(t) = te^{-Ct}$$

où C est une constante positive qui dépend de la quantité de médicament injectée. Étudier $y(t)$ comme fonction de $t \in [0, +\infty[$ en déterminant :

(a) Les limites (ou les valeurs) de $y(t)$ aux bornes de l'intervalle de définition.

(b) Les asymptotes éventuelles.

(c) Les valeurs de t pour lesquelles $y(t) > 0$ et ceux pour lesquelles $y(t) = 0$.

(d) La dérivée de y. En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de y.

(e) Le tableau de variation de y.

(f) La dérivée seconde de y. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion éventuels de y.

(g) Tracer le graphe de y.

Exercice 7 (extrait de l'examen de janvier 2006) Un médicament est injecté par voie intramuscolaire. Il passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Une étude a permis de constater que, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$f(t) = q(e^{-0,5t} - e^{-t})$$

où $t = 0$ est l'heure de l'injection et q la quantité de médicament injecté. On étudira donc la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$: déterminer

(a) $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.
(b) Les asymptotes éventuelles.
(c) La dérivée de f.En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de f.
(d) Le tableau de variation de f.
(e) La dérivée seconde de f. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion éventuels de f.

La quantité contenue dans le sang ne doit pas dépasser le seuil de toxicité $s_{\max} = 2,6$. Déduire de la question (1c) les valeurs possibles de q telles qu'à aucun moment la quantité présente dans le sang ne dépasse $s_{\max}$.

Exercice 8 (extrait de l'examen de septembre 2005) On suppose que la hauteur h (en m) d'un arbre est fonction de son âge x (en ans) selon la formule

$$h(x) = 110e^{-10/x}\,. \qquad (*)$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $h(x)$ pour $x > 0$.

Déterminer :

(a) Les limites de h aux bornes de l'intervalle de définition $]0, +\infty[$.
(b) Les asymptotes éventuelles.
(c) Les valeurs de x pour lesquelles $h(x) > 0$.
(d) La dérivée de h. En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de h.
(e) Le tableau de variation de h.
(f) La dérivée seconde de h. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion éventuels de h.
(g) Tracer le graphe de h.
(h) A partir de (*), déterminer x comme fonction de h.

Exercice 9 (extrait de l'examen de janvier 2005) L'adsorption de molécules gazeuses sur une surface solide peut être décrite par un modèle simple utilisant l'isotherme de Langmuir : $\theta = \dfrac{K \cdot p}{1 + K \cdot p}$ où θ est la fraction des sites de surface occupée par les molécules gazeuses, p est la pression et K est une constante.

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction

$$f(x) = \frac{K \cdot x}{1 + K \cdot x}$$

où :

- le domaine de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{ -\frac{1}{K} \} = \left] -\infty, -\frac{1}{K} \right[\cup \left] -\frac{1}{K}, +\infty \right[$;
- K est une constante positive.

Déterminer :

(a) Les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
(b) Les asymptotes éventuelles.
(c) Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ et ceux pour lesquelles $f(x) = 0$.
(d) La dérivée de f. En déduire la croissance/décroissance et les extrema éventuels de f.
(e) Le tableau de variation de f.
(f) La dérivée seconde de f. En déduire la concavité/convexité et les points d'inflexion éventuels de f.
(g) Tracer le graphe de f.

Exercice 10 Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (le potentiel de Morse) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où α et β sont des constantes positives propres à chaque molécule. A l'équilibre, une molécule se trouve au niveau d'énergie potentielle la plus basse. Trouvez cette position d'équilibre. Étudier la fonction V dans le domaine $r \geq 0$ et tracer son graphe.

Exercice 11 La taille d'un enfant en âge préscolaire peut être estimée par une formule empirique. Si $f(x)$ exprime la taille (en cm) à l'âge x (en ans), alors $f(x)$ est donnée pour $0,5 \leq x \leq 6$ par :

$$f(x) = 70,3 + 5,1x + 9,2\ln x\,.$$

Étudier la fonction f dans le domaine $0,5 \leq x \leq 6$ et tracer son graphe.