Université Paul Verlaine – Metz — Année universitaire 2007–2008
Mathématiques (L2)

Contrôle continu – 23 octobre 2007

Durée 1h. Les calculatrices sont autorisées. Le seul document autorisé est un formulaire manuscrit format A4 recto-verso. Les exercices sont indépendants. Justifier les réponses données. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. [4 pts]
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{2e^u}{e^u - 1}\, du\,.$$

Exercice 2. [5 pts]
Représenter graphiquement la surface délimitée par les courbes $y = 2 - x^2$ et $y = x^2/2$. Calculer l'aire de cette surface.

Exercice 3. [6+2 pts]
1. Pendant une période de $t = 0$ à $t = t_1$ du développement d'un organisme, on admet que la vitesse de croissance pondérale est proportionnelle à son poids $p = p(t)$ (exprimé en g). On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = kp\,, \tag{1}$$

où k désigne le taux d'accroissement (exprimé en jour^{-1}) et où le temps est exprimé en nombre de jours. On pose $p(0) = p_0$. Déterminer le poids de l'organisme au temps t.
Application numérique :
À l'aide de mesures statistiques, on estime que $p_0 = 1\,\text{g}$ et $p(10) = 2,718\,\text{g}$. Donner une estimation de k à 1/10ième.
2. On suppose maintenant que

$$\frac{dp}{dt} = kp - ap^2\,, \tag{2}$$

où a est le taux de ralentissment (exprimé en jour^{-2}). Déterminer le poids de l'organisme au temps t.
indication : on pourra commencer par chercher A et B tels que $\frac{1}{kp-ap^2} = \frac{1}{k}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{k-ap}\right)$.
3. (*facultatif, 2 points*)
Discuter la pertinence du modèle (1) en étudiant son comportement lorsque t_1 tend vers l'infini. Quel est le poids maximum atteint par l'organisme dans le modèle (2) lorsque $a = 5 \cdot 10^{-3}$ et $k = 0,1$?

Exercice 4. [5 pts]
1. Écrire les nombres complexes $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i$ sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^7 .$$

2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes δ tels que $\delta^2 = 3 + 4i = \Delta$; puis, en procédant comme pour les équations de degré 2 à coéfficients réels, déterminer les nombres complexes z tels que

$$z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 5i) = 0\,.$$