Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2007/2008
Mathématiques (L2)

Examen du 23 juin 2008

Durée 1h. Les calculatrices sont autorisées. Le seul document autorisé est un formulaire manuscrit format A4 recto-verso. Les exercices sont indépendants. Justifier les réponses données. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. [5 pts]

La vitesse d'une réaction chemique est donnée par l'équation

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

où k et a sont des constantes. Résoudre cette équation en déterminant x en fonction de t, en sachant que $x = 0$ au temps $t = 0$.

Exercice 2. [3 pts]

Évaluer les nombres complexes $\dfrac{2}{(1+i)^4}$ et $\left(\dfrac{1-2i}{1+3i}\right)^2$.

Exercice 3. [6 pts]

En 1941 H. Bernardelli proposa un modèle d'évolution d'une population de coléoptères. Selon ce modèle, les femelles coléoptères ont une durée maximale de vie de trois ans et peuvent être reparties en trois classes d'âges, chacune desquelles représente une année de vie. La probabilité qu'une femelle survie de la première classe à la deuxième est 1/2 ; la probabilité de survie de la deuxième classe à la troisième est 1/3. Une femelle coléoptère se reproduit seulement au cours de sa troisième année de vie et dans cette année elle engendre en moyenne 6 femelles coléoptères.

On note par $x_i(t)$ le nombre de femelles coléoptères de la classe d'âge i au temps t (l'unité de temps étant égale à un an) et on note par $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ le vecteur population femelles au temps t.

(a) Déterminer la matrice A telle que $X(t+1) = AX(t)$ pour tout t.

(b) Montrer que $A^3 = I$, où I désigne la matrice identité 3×3.

(c) Déterminer le nombre de femelles dans les trois classes d'âge en 2010 en sachant que en 2001 on avait 3000 femelles dans chacune des trois classes.

Exercice 4. [6 pts]

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système d'équations linéaires d'inconnues x, et z ci-dessous suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$\begin{cases} 2x - 3y + \alpha z = \alpha \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$