Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2007-2008
Mathématiques (L2)

Feuille de TD n^0 1 : Intégration

Exercice 1 Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = v_0 t(1-t)$ km/h pendant l'interval de temps de $t = 0$ h à $t = 1$ h.

(a) Quelle a été sa vitesse maximale ?

(b) Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Exercice 2 Déterminer les intégrales indéfinies suivantes :

(a) $\int \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)\, dx$,

(b) $\int \cos^3 x \, dx$,

(c) $\int x \sin(4x)\, dx$

(d) $\int \frac{x}{1+x}\, dx$.

Exercice 3 On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; elle est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$ fixé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$.
2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_4^9 \frac{2}{x-3}\, dx$,

(b) $\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$,

(c) $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$,

(d) $\int_0^1 x^3 e^{-x^2/2}\, dx$.

Exercice 5 Calculer l'aire de la surface limitée par :

(a) les courbes $y = x^{1/2}$ et $y = x^{1/3}$;

(b) les courbes $x = y^3 - y$ et $x = 1 - y^4$.

Exercice 6 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe $y = x^{1/2}$, la droite $x = 4$ et l'axe des abscisses autour de : 1) l'axe des abscisses ; 2) l'axe des ordonnées.

Exercice 7 L'intégrale suivante donne le volume d'un solide de révolution :

$$\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \, .$$

Déterminer le solide de révolution en question et calculer l'intégrale.

Exercice 8 On considère une force qui génère un déplacement le long de l'axe des abscisses de $x = a$ à $x = b$. Lorsque la force varie de manière continue entre a et b et vaut $F(x)$ Newton en x, le travail effectué par F entre a et b est $W = \int_a^b F(x)\,dx$ joules. Déterminer le travail effectué pour transporter un objet de $x = 2$ à $x = 3$ si la force agissant est égale à

$$F(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2} \quad \text{Newton}\,.$$

[*Indication :* écrire $\frac{x+5}{x^2+x-2}$ dans la forme $\frac{A}{x-C} + \frac{B}{x-D}$]

Exercice 9 D'après la loi de refroidissement de Newton, le taux de variation de la température d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Dériver l'évolution de la température T avec le temps t donnée par cette loi, en supposant que la température initiale T_0 du corps et la temperature T_{env} du milieu ambiant sont connues. En déduire la valeur limite de la témperature du corps lorsque t augmente.

Exercice 10 D'après le modèle logistique pour la croissance d'une population, la variation du nombre $N(t)$ d'individus au temps t est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = r(N_{\max} - N)N$$

où r est une constante positive propre à la population analysée et $P_{\max}$ donne le nombre maximal d'individus permis par l'environnement. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus.