Feuille de TD n^0 3 : Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,5$;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état I avec une probabilité $0,8$.

(a) Tracer le diagramme des probabilités de transition qui décrit cette situation et écrire la matrice des probabilités de transition.

(b) Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de deux, trois et six mois, pour chacune des situations suivantes :

  (i) au, départ, il est immunisé ;

  (ii) au départ, il est non malade et non immunisé ;

  (iii) au départ, il est malade.

Référence : http:www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/html/exercices.htm

Exercice 2 Une région naturelle de l'Ouest de la France consiste en 3000 ha de terrain répartis en les trois types suivants : eau (E), marais (M) et terrain sec (S). Soient respectivement $e(t)$, $m(t)$ et $s(t)$ les tailles en ha au temps t de E, de M et de S. Suite à diverses influences (par exemple séchesse ou inondations), la taille de E, de M et de S change dans le temps. Dans le modèle suivant, il est supposé que le changement dans une période de 10 ans est décrit par la relation $p(t+1) = Mp(t)$ où

$$p(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ m(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

(a) Tracer le diagramme des probabilités de transition du modèle.

(b) Donner la signification des coefficients $0,9$ et 0 de la matrice M.

(c) Supposons que les trois types de terrain sont initialement équirépartis. Déterminer $p(1)$ et $p(2)$.

(d) Supposons maintenant que la répartition initiale du terrain est donnée par $p(0) = w$ où $w = \begin{pmatrix} 1500 & 1000 & 500 \end{pmatrix}^T$. Qu'est-ce qu'on peut dire de $p(100)$ et $p(1000)$?

(e) Montrer que le vecteur $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ satisfait l'égalité $Mv = 0,8v$.

(f) Déterminer, si possible, les constantes x et y telles que $(1000, 1000, 1000)^T = xw + yv$.

(g) Déduire de ce qui précède la répartition $p(100)$ si les trois types de terrain sont initialement équirépartis.

Exercice 3 (Extrait de l'examen de septembre 2004) Dans un parc naturel en Afrique, les zèbres sont comptés tous les 5 ans. Les juments sont réparties sur trois classes : jeunes juments (de 0 à 4 ans, càd dans les cinq premières années de vie) ; juments adultes (de 5 à 9 ans, càd dans les deuxièmes 5 ans de vie) ; vieilles juments (avec 10 ans ou plus).

Ceci fournit pour chaque année de mesure x, un vecteur $v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$, où $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$ sont respectivement le nombre de jeunes juments, de juments adultes et de vieilles juments dans l'an x.

En 1990 on a trouvé la distribution $v(1990) = \begin{pmatrix} 160 \\ 96 \\ 64 \end{pmatrix}$.

On a déduit ensuite que chaque recensement suivant peut être prédit à l'aide de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

càd, pour tout x on a $v(x+5) = A \cdot v(x)$.

(a) Interpréter chaque coefficient de la matrice A dans le contexte donné.

(b) Quelle est le nombre de vieilles juments dans l'an 2005 selon le modèle donné ?

Exercice 4 Quelle quantité de lait contenant $1,5\%$ de matières grasses doit on mélanger avec de la crème contenant 30% de matières grasse pour obtenir 10 litres de lait contenent $4,5\%$ de matières grasse ?

Exercice 5 (Extrait de l'examen de janvier 2004) En utilisant un système d'équations linéaires, équilibrer la réaction chimique

$$\mathrm{Al(OH)_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2O}\,.$$

Exercice 6 (Extrait de l'examen de septembre 2006) Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel u le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2z = 4 + u \end{cases}$$

Exercice 7 (Extrait de l'examen de janvier 2004) Un technicien doit administrer à un animal de laboratoire trois repas principaux par jour. Il dispose de deux aliments A1 et A2. La quantité (en grammes) de protéines, de matières grasses et de fibres dans une portion de 10 g des deux aliments est donnée par la matrice suivante :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{A1} & \mathrm{A2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{protéines} \\ \text{gras} \\ \text{fibres} \end{array}$$

Chaque repas pése au total 10 g ; les proportions de chacun de ces aliments dans chaque repas sont indiquées par la matrice B :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{repas 1} & \text{repas 2} & \text{repas 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{A1} \\ \mathrm{A2} \end{array}$$

(a) Calculer le produit matriciel AB et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.

(b) Calculer le produit matriciel BA et l'interpréter, si possible, dans le contexte donné.

(c) En combinant A1 et A2, on veut obtenir un repas (de poids arbitraire) contenant p grammes de protéines, g grammes de matières grasses et f grammes de fibres. Quelles sont les conditions sur p, g et f pour que cela soit possible ?