Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2008-2009
Mathématiques L1

Feuille de TD n^0 1. Fonctions élémentaires

Exercice 1 Lorsque de l'air sec ascende, il se dilate et se refroidit. On supposera qu'on peut modéliser la temperature T (en ^oC) comme fonction de la hauteur h (en km) au moyen d'une fonction affine.

(a) Déterminer telle fonction si la temperature au sol est de 20^oC et la temperature à la hauteur de 2 km est de 10^oC.

(b) Dessinez le graphe de la fonction dans (a). Donnez une interprétation de la pente de la droite ainsi obtenue.

(c) Déterminez la temperature à la hauteur de 3 km. A quelle hauteur on a une temperature de 0^oC ?

Exercice 2 Selon la loi de Torricelli, si on perce un trou à la base d'une colonne d'eau d'une hauteur de h m, l'eau sort à une vitesse v (mesurée en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) telle que $v^2 = 2gh$ où $g = 9,81\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Comment se modifie la vitesse lorsque la hauteur est multipliée par deux ?

Exercice 3 La temperature d'ébullition de l'eau varie en fonction de la pression de l'air ambiant selon une relation du type $\log P = a + b/T$, où a et b sont des constantes, T est la température et P est la pression. Exprimez

(a) P en fonction de T ;

(b) T en fonction de P.

Exercice 4 Montrer que $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 5 Calculez ou simplifiez les expressions suivantes, C étant une constante positive :

$$\log 1000\,, \qquad e^{5\ln C}, \qquad \ln e^{\sqrt{2}}, \qquad \log_2 8\,, \qquad \log_3(9\cdot C)\,.$$

Exercice 6 On considère le modèle suivant pour l'évolution de la population mondiale P durant le 20^e siècle :

$$P(t) = 0,008\cdot(1,0137)^t$$

où t désigne l'année considérée.

(a) Estimez quand, selon ce modèle, la population mondiale atteigne un effectif de 4 milliards d'habitants.

(b) Soit $t = 1900$; combien de temps faut-il attendre pour que la population double ?

Exercice 7 Déterminer la valeur de la variable x dans les équations suivantes :

(a) $\log x = 4$;

(b) $\log(x-1) + \log(x+1) = 1$;

(c) $10^{1/x} = 1000$;

(d) $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

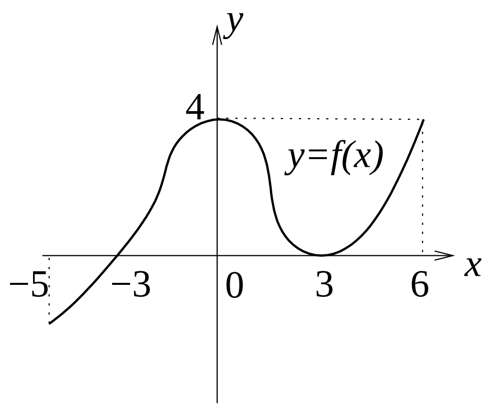
Exercice 8 (a) Déterminer le domaine de définition maximal des fonctions suivantes. En outre, déterminer quelles parmi eux sont paires, impaires ou périodiques. Dans le cas périodique, déterminer la période.

$$x^5, \qquad 5x^{1/2}, \qquad \frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{1}{\cos x}, \qquad \sqrt{16-x^2}, \qquad \sin(2x) + \tan(x/2).$$

(b) Déterminer la fonction réciproque des fonctions suivantes. Indiquer le domaine de définition et l'image.

- $f(x) = x^3$;
- $f(x) = x^{1/2} + 2$;
- $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

Exercice 9 Pour la fonction f dont le graphe est reproduit plus bas, tracez, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $y = f(x) + 2$, $y = f(x+2)$, $y = f(x/2)$ et $y = 2f(x)$



Exercice 10 Dans l'étude d'une culture bactérienne, le nombre de bactéries N est liée au temps de mesurement t (en heures) par une relation de type exponentielle. Déterminer cette relation si :

(a) en coordonnées semi-logarithmiques népériennes $(X = t, Y = \ln N)$, la relation est décrite par l'équation $Y = 3X + a$, où a est une constante ;

(b) Le nombre de bactéries au temps $t = 0$ est $N(0) = 900$.