Mathématiques L1 (SV)
Année 2008-2009

Angela Pasquale

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz (LMAM), Université Paul Verlaine - Metz

E-mail address: pasquale@math.univ-metz.fr

Table des matières

CHAPITRE 1

Fonctions élémentaires

1. Modèles continus et modèles discrets

Dans les sciences naturelles et de la vie, les mathématiques sont des outils qui permettent de formuler et d'étudier des modèles des phénomènes biologiques ou physiques.

Un *modèle* est une description mathématique d'un phénomène : d'une côté, il cherche à expliquer le phénomène considéré à partir de phénomènes plus simples ou de principes généraux ; d'autre côté, il permet de prévoir certains aspects du phénomène considéré, par exemple son évolution dans le temps.

Dans un modèle, les aspects qui peuvent être observés expérimentalement et mesurés se précisent au moyen des variables. Une *variable* est un caractère de l'objet ou du phénomène observé. Par exemple, des variables pour caractériser une espèce de fleurs sont la forme, la taille, la couleur, le nombre et la tailles des pétales, ou le nombre de pistils et d'étamines. Dans les études d'évolution d'une population, des variables importantes sont le nombre, l'âge ou le sexe des individus de la population.

A chaque variable peuvent être associées des *valeurs*. Par exemple, on mesure la hauteur d'une fleure et on donne à la variable " hauteur " la valeur 30 cm. La valeur dépend du choix d'une unité de mesure (dans l'exemple, le centimètre), qui doit toujours être indiquée. Les variables pour lesquelles les valeurs sont des nombres sont appelées *variables numériques* (ou *quantitatives*). Les variables " couleur " et " forme " ne sont pas des variables numériques ; elles sont des *variables qualitatives*.

Les modèles mathématiques se fondent sur l'analyse des variables numériques. Dans un modèle on a souvent besoin de regarder deux ou plusieurs variables liées entre eux. Supposons que deux variables, notées x et y, sont liées entre eux par une relation de façon que la connaissance de x permet de prévoir la valeur de y correspondante. On dit alors que *y est fonction de x* et on l'écrit $y = f(x)$.

On considère par exemple les situations suivantes :

(1) Selon la loi de Boyle, le volume V (exprimé en m^3) d'un gaz parfait, mantenu à température constante, est inversement proportionnel à sa pression P (en pascal). Cette loi est formulée mathématiquement par : $V = \frac{C}{P}$, où C est une constante. Si la constante C est connue, alors donnée la valeur de la variable pression P, on peut déduire par cette formule la valeur correspondante de la variable V.

(2) Le nombre N d'individus d'une population dépend du temps t. Dans une étude d'une population d'insectes, le nombre d'individus est calculé chaque semaine à partir d'un instant initial $t = 0$. On suppose que ce nombre peut être modélisé par la formule

$$N(t) = N_0 2^t \text{ individus } (t = 0, 1, 2, ... \text{ semaines})$$

où N_0 est le nombre d'individus au temps $t = 0$. Dans ce modèle, la variable N est une fonction de la variable discrète temps (mesurée en semaines)

Dans le premier exemple, la variable P est une *variable continue*, c'est-à-dire ses valeurs sont n'importe quelle quantité dans un certain intervalle réel ; dans le deuxième exemple, la variable t

est une *variable discrète*, c'est-à-dire ses valeurs sont des quantités isolées qui varient par multiples d'une certaine durée. Dans le premier cas on a donné un *modèle continu*, dans le deuxième un *modèle discret*.

2. Fonctions

Définition 1. Une *fonction* $f : I \to J$ est définie par la donnée d'un ensemble de départ I, d'un ensemble d'arrivée J et d'une correspondance f mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec un unique élément de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ est appelé le *domaine de définition* de la fonction ; l'ensemble d'arrivée est appelé le *domaine de variation* de la fonction.

Définition 2. On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Un *nombre réel* est obtenu en formant un développement décimal quelconque. $\mathbb{R}$ se figure idéalement comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. Une fonction est appelée *numérique* si son domaine de définition et son domaine de variation sont des parties de $\mathbb{R}$ (d'habitude des intervalles, bornés ou pas).

Parmi les fonctions on trouve des fonctions spéciales (comme p.ex. les fonctions sin, cos, log, etc.) ou bien des fonctions génériques avec un nom générique (par ex. f, g, h, F, etc.). Les valeurs dans le domaine de définition sont indiquées par une variable, par ex x ou t ; les valeurs correspondantes sont notées par $f(x)$ ou $f(t)$.

Exemple 1. La fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui associe à chaque élément de $[-1, 1]$ son carré sera notée par la suite

$$\begin{aligned} f :&[-1,1] \to \mathbb{R} \\ &x \longmapsto x^2 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = x^2 \quad (x \in [-1,1])$$

Remarque 1. A chaque élément x du domaine de définition d'une fonction f est toujours associé une valeur unique, c'est-à-dire $f(x)$. On peut toutefois avoir des éléments du domaine de variation de f qui ne sont pas de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de définition de x. Le domaine de variation ne doit être confondu avec l'*image* de la fonction f, qui est la partie des éléments du domaine de variation de f qui sont de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de définition de f. Dans l'exemple 1, le nombre -1 est un nombre réel, donc dans le domaine de variation de la fonction $f(x) = x^2$ $(x \in [-1, 1])$, mais -1 n'est pas un carré d'un nombre réel ; l'image de f, qui est formée par les éléments qui sont de la forme x^2 avec $x \in [-1, 1]$, est l'intervalle $[0, 1]$.

Remarque 2. Si on écrit $f(x) = x^2$ sans indiquer explicitement le domaine de définition de f, ceci signifie qu'on prend comme domaine de définition la partie de $\mathbb{R}$ formée par tout x pour lequel $f(x)$ existe. Dans cet exemple, on peut définir le carré de tout nombre réel. Le domaine de définition maximal à prendre est donc $\mathbb{R}$.

Définition 3. Le *graphe* (ou *courbe représentative*) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f. On dit aussi que l'équation du graphe de f est $y = f(x)$.

3. Propriétés élémentaires des fonctions

Par la suite, I dénote une partie de $\mathbb{R}$, comme par exemple un intervalle (fini ou infini) ou une union d'intervalles.

Remarque 3. On utilisera la notation suivante pour les intervalles :

(1) $]a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x < b$;

(2) $[a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x \leq b$;

(3) $[a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x < b$;

(4) $]a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x \leq b$;

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $-x \in I$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple 2. (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathbb{R} \setminus \{0\} :=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

Remarque 4. La fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f ; la fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie du graphe de f.

Définition 5. Une fonction $I \to \mathbb{R}$ est dite :

– *croissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
– *strictement croissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$;
– *décroissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
– *strictement décroissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$;
– *constante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple 3. La fonction $f(x) = x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; la fonction h définie par $h(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante.

Définition 6. Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction non-constante $f : I \to \mathbb{R}$ est *périodique* lorsqu'il existe une constante $T > 0$ avec la propriété que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in I$. La plus petite constante $T > 0$ pour laquelle cette identité est satisfaite est dite la *période* de f.

Exemple 4. (a) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition $\mathbb{R}$; $\sin(x)$ est impaire et $\cos(x)$ est paire.

(b) Le domaine de définition de $f(x) = \tan(x)$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ [ici $\mathbb{Z}$ note l'ensemble des nombres entiers]. La fonction $\tan(x)$ est périodique de période π.

4. La réciproque d'une fonction

Définition 7. Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to J$ est dite *injective* si pour tout $y \in J$, il y a au plus un élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$. De façon équivalente, f est injective si pour tout $x, x' \in I$, l'égalité $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.

Si $f : I \to J$ est injective et, en outre, son image est l'ensemble J, on dit que f est *bijective.*

Remarque 5. Une fonction est injective si son graphe intersecte toute droite horizonale en au plus en point.

Définition 8. Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Pour tout $y \in J$, il y a donc exactement un élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$. On pose $f^{-1}(y) := x$. La fonction $f^{-1} : J \to I$ ainsi définie est appelée la *fonction réciproque* de f.

Attention : Il ne faut pas confondre $f^{-1}(y)$ et $[f(y)]^{-1} = 1/f(y)$.

Exemple 5. La fonction sur $\mathbb{R}$ donnée par $f(x) := x^2 + 1$ n'est pas injective, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, les éléménts x et $-x$ ont la même image $f(x)$. Si on restreint le domaine de f à l'ensemble $[0, +\infty[$ des réels nonnégatifs, la fonction sur $[0, +\infty[$ définie par la même relation devient injective. Son image est $[1, +\infty[$, d'où $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ devient bijective. Pour tout $y \in [1, +\infty[$ on a : $y = f(x) = x^2 + 1$ avec $x \in [0, +\infty[$ si et seulement si $x = \sqrt{y-1}$. La récipriOque de la fonction f est donc la fonction $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, donnée par $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.

Remarque 6. (a) Le domaine de définition de f^{-1} est l'image de f et l'image de f^{-1} est le domain de f.

(b) Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Alors $f^{-1} : J \to I$ est aussi bijective. En virtù de la définition de réciproque, on a :
   (a) pour tout $x \in I$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$;
   (b) pour tout $y \in J$ on a $f(f^{-1}(y)) = y$.

(c) Toute fonction monotone strictement croissante (ou bien monotone strictement décroissante) est injective.

(d) Le graphe de la réciproque f^{-1} d'une fonction numérique f est symétrique au graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5. Fonctions élémentaires

5.1. Fonctions affines. Une *fonction affine* est définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

où a et b sont des constantes. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Si $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont deux points quelconques de la droite, alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

est appelé la *pente* de la droite ; $b = f(0)$ est le point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées. Si $b = 0$, alors le graphe passe pour l'origine du repère et f est appelé une *fonction linéaire*. f est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

5.2. Trinôme du second degré. La fonction définie par un *trinôme du second degré* est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son graphe est une parabole. Si $a > 0$, alors le sommet est un minimum ; si $a < 0$, il est un maximum. L'abscisse et l'ordonnée du sommet sont

$$x_s = -\frac{b}{2a}, \qquad y_s = f(x_s) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

5.3. Fonctions trigonométriques (ou circulaires). Les fonctions trigonométriques les plus importantes sont les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition $\mathbb{R}$. Leur image est l'intervalle $[-1, 1]$. Le domaine de définition de la fonction $\tan x$ est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et celui de la fonction $\cot x$ est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Elles sont périodiques de période π et leur image est $\mathbb{R}$.

5.4. Fonctions trigonométriques (ou circulaires) réciproques. Etant périodique, la fonction $f(x) = \sin x$ ne peut pas être injective sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. Elle devient injective si on la considère sur le domain restreint $[-\pi/2, \pi/2]$, et son image est $[-1, 1]$. La fonction réciproque de sin est notée arcsin (ou aussi $\sin^{-1}$). Donc :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

et

$$\arcsin x = y \Longleftrightarrow \sin y = x \quad \text{et} \quad y \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

De la même façon, on définie les fonctions

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$

par les relations

$$\arccos x = y \Longleftrightarrow \cos y = x \quad \text{et} \quad y \in [0, \pi]\,,$$
$$\arctan x = y \Longleftrightarrow \tan y = x \quad \text{et} \quad y \in]-\pi/2, \pi/2[\,.$$

5.5. Fonctions exponentielles et logarithmes. Soit $a > 0$ fixé. La *fonction exponentielle en base a* est définie par une relation de la forme

$$f(x) = a^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La forme du graphe de la fonction exponentielle dépend de a. Elle est strictement croissante pour $a > 1$, strictement décroissante pour $0 < a < 1$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $a = 1$. Voir figure 1.

Pour $a \neq 1$ la fonction $f(x) = a^x$ est strictement croissante ou bien strictement décroissante, d'où : $a^{x_1} = a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$.

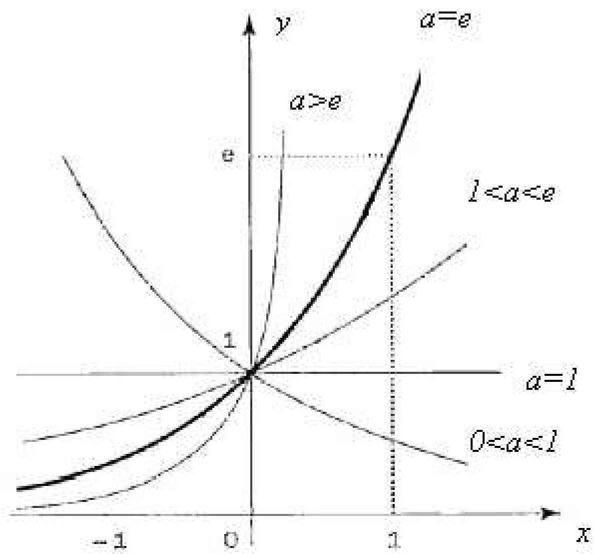

Fig. 1. Graphe de la fonction $y = a^x$

Propriétés fondamentales :

- $a^x > 0$;
- $a^x a^t = a^{x+t}$;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (car $a^{-x}a^x = a^{x-x} = a^0 = 1$) ;
- $(a^x)^t = a^{xt}$.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La *fonction logarithme en base a* est la fonction

$$f(x) = \log_a x \qquad (x \in]0, +\infty[)$$

définie par la relation

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

On suppose, par exemple, que $a = 10$. Alors $\log_{10} 1000 = 3$ car $1000 = 10^3$.

Comme pour la fonction exponentielle, la forme du graphe de la fonction logarithme dépend de la valeur de a. Voir figure 2. Plus précisément, le graphe de $y = \log_a x$ est symétrique au graphe de $y = a^x$ par rapport à la droite $y = x$.

Comme dans le cas de la fonction exponentielle, on a : $\log_a x_1 = \log_a x_2$ß$x_1 = x_2$.

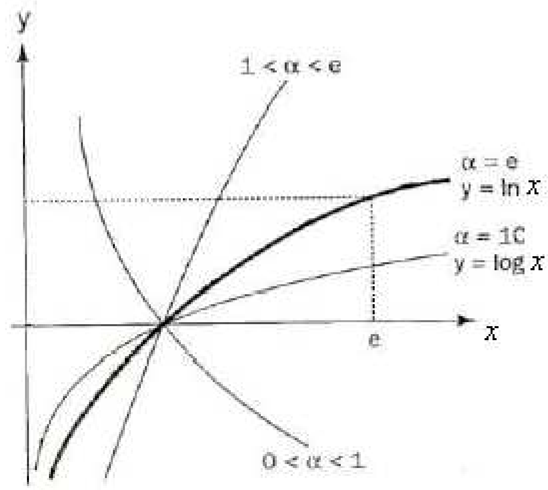

FIG. 2. Graphe de la fonction $y = \log_\alpha x$

Propriétés fondamentales :

- $\log_a(xt) = \log_a x + \log_a t$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a(1/x) = -\log_a x$ (car $\log_a(1/x) + \log_a(x) = \log_a(1/x \cdot x) = \log_a 1 = 0$) ;
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$ pour tout $x > 0$ et tout r.

Deux valeurs importantes de la base a sont les suivantes :

(a) $a =$ la *constante e d'Euler* (appelée aussi *nombre exponentiel* ou *nombre de Néper*). Elle vaut approximativement $2,718\ldots$. Une des propriétés fondamentales de la constante e est liée à la croissance de la fonction exponentielle e^x (voir chapitre 4).

La fonction $\log_e x$ est notée $\ln x$ et s'appelle *logarithme népérien* (ou *naturel*).

(b) $a = 10$. Dans ce cas, la fonction $\log_{10} x$ est notée $\log x$.

Propriétés :

(a) Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

(b) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{(\ln a)x}, .$$

En particuliers : Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$10^x = e^{(\ln 10)x}.$$

Ici $\ln 10 \approx 2,3026...$.

5.6. Fonctions puissances. Si $n \in \mathbb{N}$, on connaît la fonction puissance $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ fois}}$, qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carré $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est aussi une fonction puissance, mais elle est définie seulement pour $x \geq 0$. En général, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *fonction puissance*

$$f(x) = x^\alpha$$

a domaine de définition égal à :

- $\mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$, si $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, q impair et $q \neq 0$. Dans ce cas $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.
- $]0, +\infty[$ dans toutes les autres cases. Dans ces cases $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$. Pour $\alpha \geq 0$ on peut étendre le domaine de définition de x^α à $[0, +\infty[$ en posant $0^\alpha := 0$.

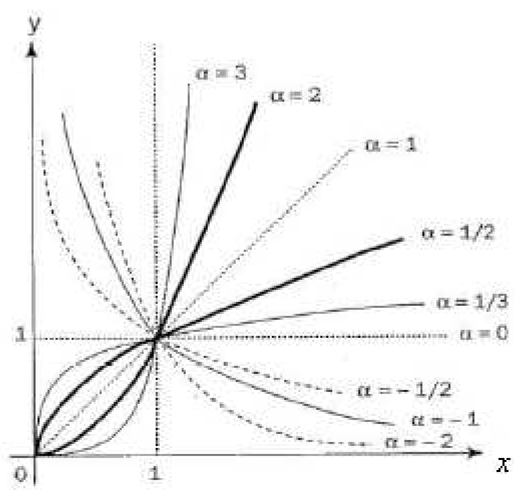

FIG. 3. Graphe de la fonction $y = x^\alpha$

Propriétés fondamentales :

- $x^\alpha > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$;
- $x^\alpha t^\alpha = (xt)^\alpha$;
- $1^\alpha = 1$;
- $(1/x)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$ (car $(1/x)^\alpha x^\alpha = 1^\alpha = 1$) ;
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

La forme du graphe de la fonction puissance $y = x^\alpha$ dépend du valeur de α. Elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $\alpha = 0$. Voir figure 3.

6. Échelles et coordonnées logarithmiques

L'*échelle linéaire* (ou *régulière*) est la ligne droite graduée usuelle, dans laquelle la distance entre deux points est proportionelle à la différence de ses valeurs numériques.

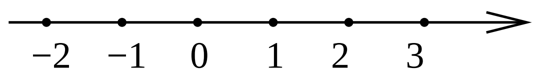

Fig. 4. L'échelle linéaire

Une échelle linéaire est mal adaptée pour la représentation d'une variable avec une gamme étendue de valeurs. On lui préfère une *échelle logarithmique*, dans laquelle le nombre étiqueté x est placé à une distance $\log x$ de l'origine. L'origine de l'échelle linéaire correspond à 1 car $\log 1 = 0$.

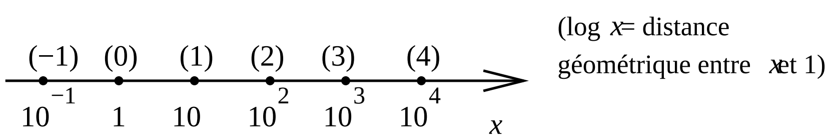

Fig. 5. L'échelle logarithmique

La distance qui sépare 1 de 10 est la même qui sépare 10 et 100 ou 100 et 1000 car

$$\log 10 - \log 1 = 1$$
$$\log 100 - \log 10 = 2 - 1 = 1$$
$$\log 1000 - \log 100 = 3 - 2 = 1$$

Donc l'échelle logarithmique dilate les valeurs faibles et rapproche les valeurs forts.

Les coordonnées semi-logarithmiques et logarithmiques permettent de représenter par des droites les fonctions exponentielles et les fonctions puissances, respectivement.

En *coordonnées semi-logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = x, \qquad Y = \log y\,.$$

Pour représenter une fonction en coordonnées semi-logarithmiques on utilise une échelle linéaire sur l'axes des abscisses et une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

EXEMPLE 6. En coordonnées semi-logarithmiques, la fonction $y = 3 \cdot 10^{2x}$ est donnée par l'équation $Y = 2X + \log 3$. En effet, on a :

$$Y = \log y = \log(3 \cdot 10^{2x}) = \log 3 + \log(10^{2x}) = \log 3 + \log(10) \cdot 2x = \log 3 + 2X\,.$$

En *coordonnées logarithmiques* le couple (x, y) est représenté par le point de coordonnées $(\log x, \log y)$. Ceci correspond à un changement de variables

$$X = \log x, \qquad Y = \log y\,.$$

Pour représenter une fonction en coordonnées logarithmiques on utilise une échelle logarithmique sur l'axes des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

EXEMPLE 7. En coordonnées logarithmiques, la fonction $y = 3 \cdot x^{10}$ est donnée par l'équation $Y = 10X + \log 3$. En effet, on a :

$$Y = \log y = \log(3 \cdot x^{10}) = \log 3 + \log(x^{10}) = \log 3 + 10 \cdot \log x = \log 3 + 10X\,.$$

CHAPITRE 2

Suites

Exemple 1. On va étudier l'évolution d'une population de bactéries. La population initiale est $a_0 = 100$. Soit

$$a_n := \text{nombre de bactéries après } n \text{ heures.}$$

On suppose qu'il existe une relation

$$a_{n+1} = r a_n$$

où r est un nombre réel positif indépendant de l'indice n. On obtient une suite (infinie) de nombres

$$a_0 = 100\,, \quad a_1 = 100r\,, \quad a_2 = 100r^2\,, \ldots, \quad a_n = 100r^n\,, \ldots$$

Le problème fondamental que nous étudierons est le comportement des termes a_n lorsque l'indice n devient infiniment grand. Par la suite considérée, ce comportement dépend de la valeur de r. Pour exemple :

- Si $r = 2$ on a :

  $$a_0 = 100\,, \quad a_1 = 2 \cdot 100\,, \quad a_2 = 2^2 \cdot 100\,, \ldots, \quad a_n = 2^n \cdot 100\,, \ldots.$$

  Le terme général a_n devient infiniment grand avec n, et on écrira $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
- Si $r = 1/2$ on a :[1]

  $$a_0 = 100\,, \quad a_1 = 100/2 = 50\,, \quad a_2 = 100/2^2 = 25\,, \ldots, \quad a_n = 100/2^n\,, \ldots$$

  Le terme général a_n est toujours positif, mais devient infiniment petit avec n, ce qu'on écrira $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Si $r = 1$ on a :

  $$100 = a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \ldots.$$

  On dira que la suite est constante.

Pour la population de bactéries nous déduisons que, selon la valeur de r, elle peut croître infiniment, ou bien s'éteindre, ou bien rester en nombre constante.

Ce que nous avons fait dans l'exemple est de construire une suite numérique a_n et de chercher sa limite. On va préciser mathématiquement ce procédé.

Définition 1. Une *suite (numérique)* est une liste ordonnée de nombres réels :

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots, a_n\,, \ldots.$$

On note cette suite aussi par $\{a_n\}$ ou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a_n s'appelle le *terme général* de la suite $\{a_n\}$. L'entier n s'appelle l'indice de a_n.

Remarque 1. La valeur du premier indice n'est pas importante : on peut avoir suites dont le premier indice est 1, c'est-à-dire a_1, a_2, a_3, ... (comme dans la définition 1), ou bien suites dont le premier indice est 0, c'est-à-dire a_0, a_1, a_2, ... (comme dans l'exemple 1), ou bien suites dont le premier indice est n'importe quel nombre entier positif n_0 fixé, c'est-à-dire a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...

[1] Ici nous ne considérons pas le problème qui a_n doit représenter le nombre de bactéries, c'est-à-dire un nombre entier, tandis que $100/2^n$ n'est pas entier pour $n > 2$

EXEMPLE 2. (a) $a_n = 1/n$ est le terme général de la suite $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

(b) $a_n = c + rn$ (où $c, r \in \mathbb{R}$ sont fixés) est le terme général de la *suite arithmétique de raison* r.

(c) $a_n = cr^n$ (où $c, r \in \mathbb{R}$ sont fixés) est le terme général de la *suite géométrique de raison* r.

On peut représenter une suite dans un graphe en marquant pour tout n le point d'abscisse n et d'ordonnée a_n. Par exemple, la suite de terme général $1/n$ peut être représentée comme suit :

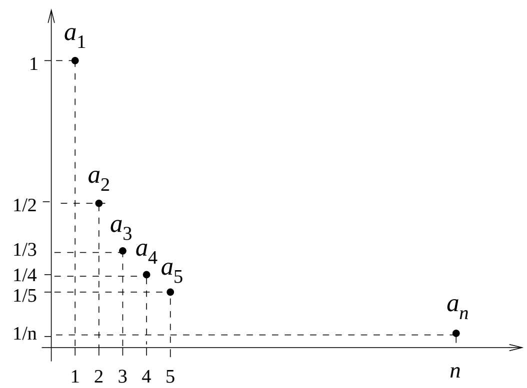

FIG. 1. Représentation graphique de la suite $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$

DÉFINITION 2. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ admet une *limite* (finie) $a \in \mathbb{R}$, et on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, si quelque soit le nombre positif ε (choisi aussi petit que l'on veut), il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ qui satisfait la propriété suivante :

$$\text{si } n \geq n_\varepsilon \ \text{, alors } |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente* (ou *non convergente*).

REMARQUE 2. n_ε dépend de ε.

Illustration de la définition : La figure 2 montre le graphe d'une suite $\{a_n\}$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. La définition de convergence vers a signifie que tous les éléments

$$a_{n_\varepsilon},\ a_{n_\varepsilon+1},\ a_{n_\varepsilon+2},\ \ldots$$

sont dans la bande horizontale entre les droites $y = a - \varepsilon$ et $y = a - \varepsilon$.

EXEMPLE 3. (a) Si $a_n = a$ pour tout n, c'est-à-dire si $\{a_n\}$ est la suite constante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On doit déterminer un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon\,.$$

Comme $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$ pour $n \geq n_\varepsilon$, il suffit de choisir n_ε tel que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. $\square$

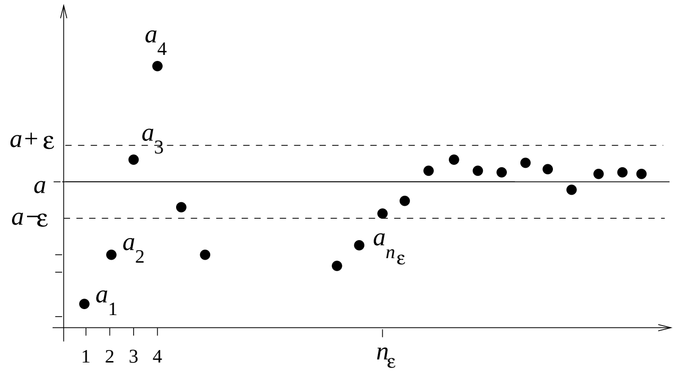

FIG. 2. Suite convergent à a

(c) La suite $\{a_n\}$ avec terme général $a_n = (-1)^n$ est non convergente. Tous les termes d'indice impair sont égaux à 1 et tous les termes d'indice impair sont égaux à -1. Si on choisit n'importe quel $a \geq 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice pair ne vérifient pas $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a-(-1) = a+1 \geq 1$). Si on choisit n'importe quel $a < 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice pair ne vérifient pas $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a - 1 < -1$, donc $|1-a| > 1$).

Règles du calcul des limites (pour suites convergentes) :

(1) Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont deux suites convergentes et $c \in \mathbb{R}$, alors

  (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n\,,$

  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n\,,$

  (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \Big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\Big)\,,$

  (d) Si, en outre, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,.$

(2) Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes telles que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Soit $\{c_n\}$ une troisième suite. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n\,,$$

alors $\{c_n\}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

(3) Soit $\{a_n\}$ une suite convergente et $c \in \mathbb{R}$.

  (a) Si $a_n > c$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq c\,;$

  (b) Si $a_n < c$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq c\,;$

  (c) Si $a_n \geq c$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq c\,;$

  (d) Si $a_n \leq c$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq c$.

EXEMPLE 4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+2}$.

On remarque que $\frac{2n}{n+2} = \frac{2}{1+\frac{2}{n}}$. Avec $a_n = 2$ (suite constante) et $b_n = 1 + \frac{2}{n}$, on a : $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \big(1 + \dfrac{2}{n}\big) = 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 1 + 0 = 1 \neq 0$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty} \big(1 + \dfrac{2}{n}\big)} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

1. Propriétés de convergence

Définition 3 (Sens de variation d'une suite). Une suite $\{a_n\}$ s'appelle

- *croissante*, si $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout n ;
- *décroissante*, si $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n ;
- *monotone*, si elle est soit croissante, soit décroissante.

Exemple 5. (a) Soit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors la suite $\{a_n\}$ est croissante, car

$$a_{n+1} - a_n = \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0\,.$$

(b) Soit $a_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite $\{a_n\}$ est décroissante.

(c) Les suites dans (a) et (b) sont exemples de suites monotones.

Définition 4. Une suite $\{a_n\}$ est *majorée* lorsque tous ses termes sont inférieurs à un nombre fixe M, c'est-à-dire $a_n \leq M$ pour tout n. On dit que M est un *majorant* de la suite.

Une suite $\{a_n\}$ est *minorée* lorsque tous ses termes sont supérieurs à un nombre fixe m, c'est-à-dire $a_n \geq m$ pour tout n. On dit que m est un *minorant* de la suite.

Une suite est *bornée* lorsqu'elle est minorée et majorée à la fois.

Exemple 6. (1) La suite de terme général $a_n = n$ est minorée par $m = 0$. Elle n'est pas majorée.

(2) La suite de terme général $a_n = (-1)^n$ est bornée, car $-1 \leq a_n \leq 1$ pour tout n.

Théorème 1. (a) *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

(b) *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

(c) *Toute suite monotone et non bornée est divergente.*

Exemple 7. (1) La suite de terme général $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et majorée par $M = 1$. Elle est donc convergente.

(2) La suite de terme général $a_n = \frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par $m = 0$. Elle est donc convergente.

2. Suites divergentes à $\pm\infty$

Définition 5. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est *divergente à* $+\infty$ (ou *a pour limite* $+\infty$), écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, lorsque pour tout $K \in \mathbb{R}$ (suffisamment grand) il existe un indice N_K tel que

$$n \geq N_K \Rightarrow a_n > K\,.$$

De la même façon, on dit qu'une suite $\{a_n\}$ est *divergente à* $-\infty$ (ou *a pour limite* $-\infty$), écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, lorsque pour tout $K \in \mathbb{R}$ (suffisamment négatif) il existe un indice N_K tel que

$$n \geq N_K \Rightarrow a_n < K\,.$$

EXEMPLE 8. Soit $h \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $\lim_{n\to\infty} n^h = +\infty$. <u>Preuve.</u> Pour $K \in \mathbb{R}$ donné, on peut choisir $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $N_K > K$. Si $n \geq N_K$, alors $n^h \geq n \geq N_K \geq K$.

<u>Règles du calcul pour suites divergentes vers $\pm\infty$:</u>

(1) (a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$;

(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $a_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$;

(c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $a_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

(2) Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites.

(a) Suppose il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Si $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors aussi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, alors aussi $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(b) Si $\{a_n\}$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

EXEMPLE 9. (1) La suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ a limite $+\infty$ et donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(2) La condition que $a_n > 0$ pour tout n est nécessaire dans (1)(b). Soit par exemple $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mais $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ et donc $\{1/a_n\}$ n'a pas limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Les exemples suivants sont remarquables :

EXEMPLE 10. (1) La suite géométrique de raison r est $\{r^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, r, r^2, r^3, \ldots\}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

(2) Quelques valeurs de la suite de terme général $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sont :

n	1	2	3	4	5	6	100	1000	100000000
a_n	2	2,25	2,37	2,44	2,59	2,59	2,70	2,717	2,71828180

Ces valeurs indiquent que la suite $\{a_n\}$ est croissante. En effet on peut vérifier mathématiquement qu'elle est croissante et majorée, donc convergente. La limite est le nombre e d'Euler :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Suites récurrentes

DÉFINITION 6. Une suite $\{a_n\}$ est appelée *récurrente* si elle définie par la donnée de son premier terme a_0 et par une relation de récurrence

$$a_{n+1} = f(a_n)\,,$$

où f est une fonction.

Exemple 11. Soit $a_0 = 100$ et $a_{n+1} = 2a_n$ (voir Exemple 1). Ici $f(x) = 2x$ est la fonction qui définie la relation de récurrence.

Exemple 12. Au moyen de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x}$ on peut construire la suite récurrente

$$a_{n+1} = f(a_n) = \frac{2}{a_n}\,.$$

Afin que cette suite soit bien définie, il est nécessaire que chaque terme a_{n-1} soit différent de zéro. Pour cela il suffit que le premier terme a_0 soit différent de 0. Si par ex. on choisit $a_0 = 1$, alors on a

$$a_1 = \frac{2}{a_0} = 2\,; \qquad a_2 = \frac{2}{a_1} = 1\,; \qquad a_3 = \frac{2}{a_2} = 2\,; \ldots$$

c'est-à-dire

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair}\,, \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair}\,. \end{cases}$$

Pour étudier la convergence d'une suite récurrente, on supposera que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait à la propriété suivante :

(P) Si $x_n \in I$ pour tout n et $\{x_n\}$ converge vers $x \in I$, alors $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x)$.

Remarque 3. Si f est une fonction continue sur I (voir Ch. **??**), alors f satisfait la propriété précédente. Par ex. les fonctions élémentaires a^x, $\log_a x$ et x^a introduites dans le chapitre précédente sont continues sur leurs domaines de définition.

Définition 7. Un élément $a \in \mathbb{R}$ s'appelle un *point fixe* de la suite récurrente $\{a_n\}$ définie par la donnée de son premier terme a_0 et par la relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$, lorsqu'il est une solution de l'équation $f(a) = a$.

Proposition 3. *On suppose que f satisfait la propriété (P) énoncée précédemment. Soit $\{a_n\}$ la suite récurrente définie par la donnée de a_0 et de la relation $a_{n+1} = f(a_n)$. Si $\{a_n\}$ converge vers a, alors a est un point fixe de $\{a_n\}$.*

Preuve. Si $\{a_n\}$ converge vers a, alors aussi la suite $\{b_n\}$ avec $b_n := a_{n+1}$ converge vers a. La propriété (P) donne que $f(a_{n+1})$ converge vers $f(a)$. Donc :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)\,,$$

d'où $f(a) = a$, c'est-à-dire a est point fixe de $\{a_n\}$. □

Exemple 13. On se donne la suite récurrente $\{a_n\}$ définie par son premier terme $a_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}\,.$$

La fonction f qui définit la relation de récurrence est $f(x) = \sqrt{2x}$, qui est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

On montre que $\{a_n\}$ est convergente. On preuve d'abord par récurrence [1] que pour tout n on a

$$1 \le a_n \le 2\,. \tag{1}$$

[1] **Principe de récurrence**
Soit P une propriété dépendant de l'entier $n \ge 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

(i) $P(n_0)$ est vraie ;

(ii) pour tout $n \ge n_0$: $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \ge n_0$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$, car $a_0 = 1$. On suppose que a_n satisfait $1 \leq a_n \leq 2$. Alors $1 \leq \sqrt{2 \cdot 1} \leq a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. D'où la propriété est vraie.

On montre maintenant que la suite $\{a_n\}$ est croissante. En effet, d'après (1), on a

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \sqrt{a_n}(2 - \sqrt{a_n}) \geq 1 \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire $a_{n+1} \geq a_n$.

Comme $\{a_n\}$ est croissante et majorée, elle est convergente.

Sa limite a est un point fixe de $\{a_n\}$, c'est-à-dire une solution de l'équation $x = \sqrt{2x}$. Donc $a = 0$ ou $a = 2$. Comme $a_n \geq 1$ pour tout n, on obtient que $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 1$. Donc $a \neq 0$, qui entraîne $a = 2$.