Feuille de TD n^0 1 : Intégration

Exercice 1 Déterminer les intégrales indéfinies suivantes :

(a) $\int \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)\, dx$,

(b) $\int (e^{x/2} + e^{-x/2})\, dx$,

(c) $\int \frac{x}{1+x}\, dx$,

(d) **[Extrait du partiel du 25 janvier 2007]** $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$.

Exercice 2 On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; elle est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$ fixé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.
2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{\pi/6} \cos x e^{\sin x}\, dx$,

(b) $\int_4^9 \frac{2}{x-3}\, dx$,

(c) $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} e^{1/x}\, dx$,

(d) **[Extrait du contrôle continu du 17 octobre 2006]** $\int_1^2 (1+x^2)\ln x\, dx$

(e) $\int_2^3 \frac{1}{x-x^2}\, dx$ Indication : Trouver des constantes A et B telles que $\dfrac{1}{x-x^2} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{x}$

Exercice 4 Représenter graphiquement et calculer l'aire de la surface limitée par :

(a) la courbe $y = e^x$ et les droites $y = -x$, $x = 2$ et $x = 0$;

(b) la courbe $y = \sqrt{x}$, la droite $y = x - 2$ et l'axe des abscisses.

Exercice 5 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe $y = x^3$, la droite $y = 1$ et l'axe des ordonnées autour de : 1) l'axe des ordonnées ; 2) l'axe des abscisses.

Exercice 6 (Extrait du contrôle continu du 17 octobre 2005) On injecte une dose de 200 mg d'un certain médicament par voie intraveineuse ; on désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. A l'instant $t = 0$, qui correspond à la fin de l'injection, un dosage de la concentration est effectué : le résultat est de 11 μg/ml. Après l'injection, la décroissance de la concentration C obéit à la règle suivante :

$$\Delta C = -\gamma C \Delta t$$

où γ est une constante positive.

Montrer que la concentration $C(t)$ suit une loi exponentielle $C(t) = Qe^{-\gamma t}$ où γ est une constante dont on précisera la valeur.

Exercice 7 (Extrait du partiel du 27 janvier 2007) Les noyaux de certains atomes possèdent un moment magnétique nucléaire : sous l'action d'un champ magnétique statique, les différents vecteurs moment magnétique s'orientent parallèlement à ce champ. Un modèle pour le changement de magnétisation m en fonction du temps t est donné par l'équation différentielle

$$m'(t) = \alpha M \left(1 - \frac{m(t)^2}{M^2}\right), \qquad (*)$$

où α et M sont des constantes positives. Initialement les atomes sont arbitrairement ordonnés, d'où $m(0) = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (*) et montrer que la solution qui satisfait la condition $m(0) = 0$ est la fonction

$$m(t) = M\,\frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1}.$$