Feuille de TD n^0 2 : Nombres complexes

Exercice 1 (a) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(2+i)(3+4i)\,, \qquad \frac{2+i}{3+4i}\,, \qquad \frac{1}{1+i}+2\,.$$

(b) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1+i\sqrt{3}\,, \qquad (1+i)^n\,, \qquad 1+e^{i\pi/3}\,, \qquad \frac{1+i}{1-i}\,.$$

Exercice 2 (a) Déterminer les nombres complexes z tels que z^2 est un nombre réel.

(b) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $x^2+2x+5=0$ et $x^2+25=0$.

Exercice 4 Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = a+bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$.

(a) Soit f une fonction à valeurs complexes et de la forme $f(t) = g(t) + ih(t)$ pour des fonctions dérivables $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la dérivée $f'(t)$ de f par $f'(t) := g'(t) + ih'(t)$, où $g'(t)$ et $h'(t)$ sont les dérivées usuelles des fonctions g et h.

Soit maintenant λ un nombre complexe fixé. On définit la fonction à valeurs complexes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $f(t) = e^{\lambda t}$. Montrer que $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

On considère l'*équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants*

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0\,, \tag{*}$$

où $y = y(t)$ est la fonction inconnue, et A et B sont deux constantes réelles fixées. Soient λ_1 et λ_2 les racines de l'équation $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$.

(b) Supposons que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrer que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sont solutions de $(*)$. En déduire que toute fonction de la forme $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes arbitraires, est une solution de (*).

(c) Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2$. Montrer que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ sont solutions de $(*)$. En déduire que toute fonction de la forme $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes arbitraires, est une solution de (*).

On peut montrer (mais ce n'est pas à montrer ici), que les fonctions considérées ci-dessus sont *toutes* les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle (*).

On considère maintenant nouvellement le cas dans (b) où $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supposons, en outre, que λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes non réels.

(d) Montrer que λ_2 est le complexe conjugué de λ_1.

(e) On écrit $\lambda_1 = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des solutions complexes de (*) est de la forme $y(t) = K_1 e^{at} \sin(bt) + K_2 e^{at} \cos(bt)$ où K_1, K_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(f) En déduire de ce qui précède, les ensembles des solutions réelles de l'équation différentielle (*) selon la nature de λ_1 et λ_2.

(g) Lorsque l'on néglige le frottement, l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un pendule de longueur L pour des petits mouvements autour de sa position d'équilibre, est donnée par

$$\theta''(t) + \omega^2 \theta(t) = 0.$$

Dans cette équation, la fonction inconnue θ représente l'angle (en radians) entre le pendule et la verticale en tant que fonction du temps t ; en outre, $\omega = \sqrt{g/L}$ où $g = 9,81 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ est la constante de gravitation. Déterminer $\theta(t)$.