

Feuille de TD n^o 1 : Espaces vectoriels

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

- (a) $E_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$
- (b) $E_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = x - z = 0\}$
- (c) $E_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$

Exercice 2 Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Parmi les sous-ensembles suivants de \mathcal{F} , dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- (a) l'ensemble des fonctions continues,
- (b) l'ensemble des fonctions dérivables,
- (c) l'ensembles des fonctions paires,
- (d) l'ensemble des fonctions décroissantes,
- (e) l'ensemble des fonctions monotones,
- (f) l'ensemble des fonctions bornées,
- (g) $\{f \in \mathcal{F} : \text{la limite } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe}\}$,
- (h) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$
- (i) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = f(1)\}$
- (j) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$
- (k) $\{f \in \mathcal{F} : f(x^2) = (f(x))^2\}$

Exercice 3 Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices $n \times n$ à coefficients réel. Parmi les sous-ensembles suivants de $M_n(\mathbb{R})$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

- (a) les matrices inversibles,
- (b) les matrices non inversibles,
- (c) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ où $B \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée.

Exercice 4 (a) Décrire tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 considéré comme espace vectoriel réel.

- (b) On pose $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{Z}_2)^3$ considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{Z}_2 .

Exercice 5 Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants dans les espaces vectoriels E indiqués.

- (a) $\vec{v}_1 = (-2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -2)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$,
- (b) $\vec{v}_1 = (1, i, 2 + i)$, $\vec{v}_2 = (i, 1, 2 - i)$, $\vec{v}_3 = (2i, 0, -1 - i)$ dans $E = \mathbb{C}^3$,
- (c) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 0, 1)$ dans $E = (\mathbb{Z}_2)^4$,

- (d) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans $E = M_2(\mathbb{R})$ (=l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices 2×2 à coefficients réels).

Pour chacun des cas ci-dessus, déterminer une base de $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et compléter cette base en une base de E .

Exercice 6 Soient $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Déterminer si f, g et h sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 7 Soit $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes dans la variable x à coefficients réels de degré ≤ 3

- Montrer que $\{x^3 + 1, x^2 - x, x - 1, x^2 + 1, 1\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$.
- Déterminer une base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_3[x]$ contenue dans cette famille.
- Déterminer les composantes du polynôme $2x^3 + x^2$ par rapport à la base \mathcal{B} choisie.

Exercice 8 Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de \mathbb{R}^3 et soient $E = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 engendrés par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, & \vec{u}_2 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{v}_1 &= 2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2, & \vec{v}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Déterminer la dimension de E , F , $E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 9 (a) Trouver un supplémentaire dans \mathbb{R}^3 de l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(0, 1, 1)$. Ce supplémentaire est-il unique ?

- (b) On considère les deux sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \text{Vect}((1, 0, 1)) \quad \text{and} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0)).$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

- (c) Est-ce que la relation $E = F \oplus G$ est encore valable si $E = (\mathbb{Z}_2)^3$?

Exercice 10 Soient $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Asym}_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
- Même question pour l'ensemble $\text{Asym}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \text{Asym}_n(\mathbb{R})$.