Université Paul Verlaine – Metz — Année universitaire 2009-2010
Algèbre 2 (L2)

Feuille de TD n^0 2 : Applications linéaires

Exercice 1 Parmi les applications suivantes déterminer lesquelles sont linéaires sur $\mathbb{R}$. Pour chacune de celles-ci, déterminer son noyau et son image. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto -x^2\,,$ $\qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 2x+1\,,$
$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y) \mapsto (-y, x+2y)\,,$ $\qquad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}\,,$
$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \overline{z}z$ $\qquad f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto 2\overline{z}+1\,,$
$f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto 2x+3y+1\,,$ $\qquad f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, z)\,,$
$f_9 : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}\,, \quad p(x) \mapsto p(0)\,,$ $\qquad f_{10} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad A \mapsto \mathrm{trace}(A)\,,$
$f_{11} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})\,, \quad A \mapsto A + A^t\,,$ $\qquad$ où A^t dénote la transposée de A

Est-ce que les applications f_4, f_5 et f_6 sont linéaires sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2 Soit $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ la dérivation de polynômes, définie par $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Montrer que D est linéaire, surjective, mais pas injective.

Exercice 3 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que la composée $g \circ f$ est une application linéaire.

(b) On suppose que f est bjective (donc un isomorphisme). Montrer que f^{-1} est une application linéaire.

(c) Déduire de ce qui précède que l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel E muni de la loi de composition d'applications est un groupe.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f((1,1)) = (1,0,-2)$ et $f((1,2)) = (0,1,-1)$.

(a) Déterminer $f((4,6))$.

(b) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 5 Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension 3 et 4, respectivement. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4}\}$ une base de F. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice associée dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Déterminer des bases pour le noyau et pour l'image de f.

Exercice 6 (a) Soient E un espace vectoriel réel et soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E. Soit λ un réel. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\varphi_\lambda(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \varphi_\lambda(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \varphi_\lambda(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3\,.$$

Pour quelles valeurs de λ, φ_λ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

(b) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ une base de E et soit $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon_1}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}\}$ une famille d'éléments de F.

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(\vec{e_j}) = \vec{\varepsilon_j}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

2) Montrer que si $\dim E = \dim F$ et si $\mathcal{C}$ est une base de F, alors l'application f est un isomorphisme.

(c) Soient $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Montrer que les espaces vectoriels $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ sont isomorphes. Exhibir un isomorphisme de E sur F.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire (sur $\mathbb{C}$) dont la matrice associée dans les bases canoniques est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

(b) Déterminer l'image sous f de l'hyperplane H de $\mathbb{C}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 2, 1, 0)$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice associée aux bases canoniques est

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer $f((1, 2, 3))$ et $f((x_1, x_2, x_3))$.

(b) Déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases

$$\mathcal{B} = \{2e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \{e_3, e_1, e_2\}\,.$$

Exercice 9 Le systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} y_1 &= 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ y_2 &= \phantom{2x_1 -{}} ax_2 - x_3 + 2x_4 \\ y_3 &= bx_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases}$$

décrit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ donnée par rapport aux beses canoniques. Ici a et b sont des paramètres réels.

(a) Déterminer les valeurs de a et b afin que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$.

(b) Pour les valeurs de a et b déterminées en (a), donner des bases de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 10 Soient $f g \colon E \to F$ deux applications linéaires avec F de dimension finie. Montrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel. On appelle projecteur un endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$. Soit p un projecteur.

(a) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

(b) Montrer que $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - p)$ et que donc $E = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - p) \oplus \operatorname{Im}(p)$

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'application linéaire f donnée géométriquement comme la symétrie autour de la droite d'équation $x_1 - x_2 = 0$ et parallèlement à la droite d'équation $x_1 + x_2 = 0$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.