

### Feuille de TD n° 3 : Espace dual.

**Exercice 1** On considère les formes linéaires sur  $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_1(\vec{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3, \quad \varphi_2(\vec{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad \varphi_3(\vec{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3.$$

Forment-elles une base de l'espace dual de  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 2** Déterminer la forme linéaire  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\varphi(1, 0, 1) = 0, \quad \varphi(2, 1, 1) = 1, \quad \varphi(1, 2, 3) = -1.$$

Donner une base du noyau  $\text{Ker}(\varphi)$ .

**Exercice 3** On considère la base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de  $\mathbb{C}^3$  où

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1)^t, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 1)^t, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^t.$$

Déterminer la base de  $(\mathbb{C}^3)^*$  duale de  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 4** Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K}$  et soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  des applications linéaires. On note respectivement  $f^t : F^* \rightarrow E^*$  et  $g^t : G^* \rightarrow F^*$  leurs transposées. Démontrer les propriétés suivantes :

- (a)  $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$ ,
- (b) Si  $f$  est bijective, alors aussi  $f^t$  est bijective, et  $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$ .

**Exercice 5** Déterminer l'orthogonal pour la dualité  $F^0$  du sous-espace  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 3, 2, 1)^t, \quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1)^t, \quad \vec{v}_3 = (2, 3, 4, -1)^t.$$

**Exercice 6** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{K}$  et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- (a) Montrer que  $(\text{Im } f)^0 = \text{Ker}(f^t)$ .
- (b) Montrer que si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^t)$ .
- (c) En déduire que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$  pour toute matrice  $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ .