Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2009-2010
Algèbre 2 (L2)

Feuille de TD n^0 4 : Déterminants.

Exercice 1 Montrer que la cardinalité de l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ est $n!$.

Exercice 2 On considère les permuations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 2 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_{10}$$
$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$$

(a) Décomposer les permutations ci-dessus en cycles disjoints.

(b) Donner pour chacune des permutations une decomposition en tant que produit de transpositions et en calculer la signature.

Exercice 3 En utilisant la définition, calculer le déterminant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui est triangulaire supérieure, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & * \\ 0 & a_{2,2} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Exercice 4 (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1991 & 1992 & 1993 \\ 1994 & 1995 & 1996 \\ 1997 & 1998 & 1999 \end{pmatrix}.$$

(b) Lesquelles parmi les matrices ci-dessus sont inversibles ?

(c) Calculer, si possible, la comatrice et l'inverse des matrices A, B et C.

Exercice 5 Soit n un entier ≥ 2 et soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer directement $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.

(b) En développant le déterminant de A_n selon la dernière ligne, montrer que $\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ for $n \geq 3$.

(c) Déduire de ce qui précède que $\det(A_n) = n + 1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 6 Vérifier que le système d'équations linéaires suivant est de Cramer et le résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 - & 2x_2 & +2x_3 & = 3 \\ & x_2 & -2x_3 & = 2 \end{cases}$$

Exercice 7 (a) Déterminer si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \qquad \vec{v}_2 = (3, 0, -1), \qquad \vec{v}_3 = (2, 1, 3)$$

est libre.

(b) Déterminer une condition sur les paramètres réels α et β pour que la famille

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \qquad \vec{v}_2 = (\alpha, 0, -1), \qquad \vec{v}_3 = (1, \beta, -1)$$

soit liée dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$