ALGEBRE LINÉAIRE 2 - EXAMEN DU 11/1/2010 - CORRIGES

EXERCICE 1

(a) [2] Soit $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}_3[x]$. Alors $\dim F = \operatorname{rg} A$ où $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\{p(x),q(x),r(x)\}$ est la matrice dont les colonnes contiennent les composantes dans $\mathcal{B}$ de p,q et r, respectivement, càd

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&\alpha&1+\alpha\\1&2&1\\0&\alpha&2\alpha\end{bmatrix}.$$

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A, on obtient : $A \sim \begin{bmatrix}1&2&1\\0&\alpha&2\alpha\\0&\alpha&\alpha+1\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&1\\0&\alpha&2\alpha\\0&0&1-\alpha\\0&0&0\end{bmatrix} =: A'$

et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$.

Si $\alpha=1$: $A'=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ et $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A'=2$

Si $\alpha=0$: $A'=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ et $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A'=2$

Si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, alors $\det\begin{bmatrix}1&2&1\\0&\alpha&2\alpha\\0&0&1-\alpha\end{bmatrix}=\alpha(1-\alpha)\neq 0$, d'où $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A'=3$

(b) [0,5] Si $\alpha=1$, alors $p(x)=1+x^2$, $q(x)=2+x+2x^2+x^3$, $r(x)=1+2x+x^2+2x^3$

Puisque $s(x)=1+x+x^2+x^3 = q(x)-p(x)$, on a $s(x)\in F$.

(c) [1,5] Si $\alpha=1$, alors $\dim F=2$ et donc, p. ex., les deux vecteurs non proportionnels p et q de F en forment une base. On a $\mathbb{R}_3[x]=F\oplus G$ où $G=\operatorname{Vect}\{1,x\}$ (par exemple). En effet, $\dim G=2$ car 1 et x sont lin. indépend. (non proportionnels), d'où $\dim F+\dim G = 4 = \dim\mathbb{R}_3[x]$; en outre, $F\cap G=\{0\}$. Ceci peut être vérifié par exemple de façon directe : si $t(x)\in F\cap G$, alors $\exists\, \lambda,\mu,\nu,\eta\in\mathbb{R}$ tels que $t(x)=\lambda(1+x^2)+\mu(2+x+2x^2+x^3)$ $=\nu+\eta x$, càd $\exists\,\lambda,\mu,\nu,\eta\in\mathbb{R}$ tels que $(\lambda+2\mu-\nu)+(\mu-\eta)x+(\lambda+2\mu)x^2+\mu x^3=0$, càd $\exists\,\lambda,\mu,\nu,\eta\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{cases}\lambda+2\mu-\nu=0\\ \mu-\eta=0\\ \lambda+2\mu=0\\ \mu=0\end{cases}$, càd $\lambda=\mu=\nu=\eta=0$, d'où $t(x)=0$.

Une méthode alternative : $B=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\{1,x,p(x),q(x)\}=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ a déterminant $=1$ (le produit des élém. diagonaux)

D'où $\dim(F+G)=\dim\operatorname{Vect}\{1,x,p(x),q(x)\}=4$. Par conséquent : $\dim(F\cap G)=$ $=\dim(F+G)+\dim F+\dim G = 4-4=0$, càd $F\cap G=\{0\}$.

EXERCICE 2

(a) [1] Soit $\mathcal{B}_{can}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{B}=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si $A=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}\mathcal{B}$ a rang 3. On a $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$ et $\det A=-1\neq 0$ (par ex. par la règle de Sarrus : $\det A = 2-2-1=-1$), càd $\operatorname{rg}A=3$.

(b) [2] $\{\bar{u}_1^*,\bar{u}_2^*,\bar{u}_3^*\}$ est la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ si

$$\bar{u}_j^*(\bar{u}_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}\quad \text{pour tout } i,j=1,2,3 \qquad (*)$$

Si on note $\bar{u}_j^*\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\alpha_j x+\beta_j y+\gamma_j z$ pour $j=1,2,3$, alors les conditions $(*)$ se traduisent en le produit matriciel

$$\begin{array}{c} \bar{u}_1^* \\ \bar{u}_2^* \\ \bar{u}_3^* \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}}_{=U} \underbrace{\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \end{array}}_{A} = I_3, \text{ où } I_3 \text{ est la matrice identité } 3\times 3$$

Les composantes $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ de $\bar{u}_j^*$ sont donc les lignes de la matrice U avec $U = A^{-1}$. La matrice $U = A^{-1}$ peut être calculée par la méthode de Gauss ou par la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof}(A)^t$ où $\operatorname{cof}(A)$ est la comatrice de A. Ceci donne $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, càd $\begin{cases} \bar{u}_1^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - y - 2z \\ \bar{u}_2^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + y + 2z \\ \bar{u}_3^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - z \end{cases}$

EXERCICE 3

(a) [0,5] $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) [1] $\chi_f(x) = \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)\det\begin{bmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{bmatrix} =$

$= (2-x)\left[(1-x)^2 - 1\right] = (2-x)(\cancel{1} + x^2 - 2x \cancel{-1}) = (2-x)(x-2)x = -x(x-2)^2$

Les valeurs propres de f sont donc 0 et 2. Leur multiplicité algébrique est $m_{alg}(0) = 1$, $m_{alg}(2) = 2$.

(c) [1,5] $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $rg(A-2I) = 1$ et $\dim \ker(A-2I)$

$= 3 - rg(A-2I) = 2$, càd $m_{géom}(2) = 2 = m_{alg}(2)$

Puisque $1 \leq m_{géom}(0) \leq m_{alg}(0) = 1$, on a aussi $m_{géom}(0) = m_{alg}(0)$ $(=1)$

Donc : χ_f est scindé et pour toute valeur propre λ de f on a $m_{géom}(\lambda) = m_{alg}(\lambda)$, ainsi f est diagonalisable

(d)

[1] $E_0 := \ker A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$, d'où $E_0 = \ker A = \mathbb{R}\underbrace{(1,1,-1)}_{\bar{u}_1}$

$E_2 := \ker(A - 2I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} x - y = 2x \\ -x + y = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases} \right\}$

$\begin{cases} x - y = 2x \\ -x + y = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z \text{ arbitraire} \end{array}$, d'où $E_2 = \ker(A - 2I) = \mathbb{R}\underbrace{(1,-1,0)}_{\bar{u}_2} + \mathbb{R}\underbrace{(0,0,1)}_{\bar{u}_3}$

Espaces propres associés à valeurs propres différents sont en somme directe ; $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ est une base de E_2 (car $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ non proportionnels). Donc $\mathcal{C} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f.

(e) [1,5] On pose $P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors P est inversible car $\mathcal{C}$ est une base (on peut bien sûr aussi le vérifier directement ; $\det P \neq 0$). Si $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors D est une matrice diagonale et $P^{-1}AP = P^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = D$ car $f(\bar{u}_1) = \bar{0}$, $f(\bar{u}_2) = 2\bar{u}_2$ et $f(\bar{u}_3) = 2\bar{u}_3$

(f) Le polynôme minimal $m_f(x)$ de f est un diviseur de $\chi_f(x)$ et possède
[1,5] les valeurs propres 0 et 2 en tant que racines. Donc :

$m_f(x) = x(x-2)$ ou bien $m_f(x) = x\cdot(x-2)^2$ (remarquer que le coefficient du terme du plus haut degré de m_f vaut 1)

Puisque $A(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, on

a $m_f(x) = x(x-2)$ pour minimalité.

EXERCICE 4

(a) On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f\circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(g) = AB$ et
[1,5]
$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_3(\mathbb{C})$ est un isomorphisme, on déduit que $f\circ g = 0$ est l'endomorphisme nul de E.

De même, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = BA$ et

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} : \mathcal{L}(F) \to M_3(\mathbb{C})$ est un isomorphisme, on obtient $g\circ f = 0$, l'endomorphisme nul de F.

(b) • Si $\bar{v} \in \mathrm{Im}(g)$, alors $\exists\, \bar{u} \in F$ tel que $\bar{v} = g(\bar{u})$, d'où $f(\bar{v}) = f(g(\bar{u}))$
[0,5] $= (f\circ g)(\bar{u}) = \bar{o}$ d'après (a), càd $\bar{v} \in \ker(f)$. Ainsi : $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.

En intervertant le rôle de f et g, on obtient $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ à partir de $g\circ f = 0$

(c) On a $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg} A = 1$, ainsi $\dim\ker(f) = 3 - \dim \mathrm{Im}(f) = 2$
[2,5] On a $\dim \mathrm{Im}(g) = \mathrm{rg} B = 2$, ainsi $\dim\ker(g) = 3 - \dim \mathrm{Im}(g) = 1$

D'après (b) : $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$

On vient de montrer que $\dim \mathrm{Im}(g) = \dim\ker(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim\ker(g) = 1$.

Ainsi $\mathrm{Im}(g) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$

(d) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(\bar{\varepsilon}_1), f(\bar{\varepsilon}_2), f(\bar{\varepsilon}_3)\}$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. Puisque
[2,5] $f(\bar{\varepsilon}_1) \neq \bar{o}$, on a alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(\bar{\varepsilon}_1)\} = \mathbb{C}(\underbrace{\bar{\varepsilon}_1 + 2\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3}_{\bar{v}_1})$

Une base de F qui contient $\bar{v}_1$ est par exemple $\tilde{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_1, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$. En effet $\tilde{\mathcal{B}} \subset F$ est une famille de 3 ($=\dim F$) vecteurs qui est libre car $\bar{o} = \lambda_1(\bar{\varepsilon}_1 + 2\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3) + \lambda_2\bar{\varepsilon}_1 + \lambda_3\bar{\varepsilon}_2$
$= (\lambda_1+\lambda_2)\bar{\varepsilon}_1 + (2\lambda_1+\lambda_3)\bar{\varepsilon}_2 - \lambda_1\bar{\varepsilon}_3$ équivaut à $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$
car $\mathcal{E}$ est une base, et ceci donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Alternatif : $\det \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{B}} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$