PARTIEL DU 2/11/2009, ALGEBRE LINEAIRE II, 2009/2010 - CORRIGES

EX 1 $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ appartiennent à V et sont lin. indép. (car non proportionnels), d'où $\dim V \geq 2$. On a $V \neq \mathbb{R}^3$ (par ex. car $(1,1,1) \notin V$), d'où $\dim V < 3$. Par conséquent $\dim V = 2$ et $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est une base de V.

EX 2 (a) $\mathbb{C}^3[x]$ et $\mathbb{C}^4$ sont isomorphes car ils sont de dimension 4 sur $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0),\ e_3=(0,0,1,0),\ e_4=(0,0,0,1)\}$ les bases canoniques de $\mathbb{C}^3[x]$ et $\mathbb{C}^4$, respectivement. Un isomorphisme $\varphi : \mathbb{C}^3[x] \to \mathbb{C}^4$ est obtenu par prolongement par $\mathbb{C}$-linéarité de l'application $\varphi : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ donnée par $\varphi(x^k) = e_{k+1}$ pour $k = 0,1,2,3$. Explicitement :

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{3} a_k x^k\right) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

(b) On a $U+V = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\{u_1,u_2,v_1,v_2\} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \end{array}$$

$$\underset{\text{puis } L_1 \leftrightarrow L_2}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{L_4 \to L_4 + L_3}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Par conséquent $\{u_1, u_2, v_1\}$ est une base de $U+V$ et $\dim(U+V) = 3$.

On a $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

$\dim U = \dim V = 2$ car u_1 et u_2 (resp. v_1 et v_2) ne sont pas proportionnels, donc lin. indépend. Par conséquent :

$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2 + 2 - 3 = 1$

On a $u_1 = v_2 - v_1$. On peut voir ceci directement ou bien comme suit :

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \underset{\substack{L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_3 \to -L_3}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

d'où $v_2 = u_1 + v_1$, càd $u_1 = v_2 - v_1$. Par conséquent $u_1 \in U \cap V$ et $U \cap V = \mathbb{C}u_1$ possède p. ex. base $\{u_1\}$

EX 3 $\mathcal{B} = \left\{\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{C} = \left\{\bar{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2$,

$$\text{d'où } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \end{array} \end{array}$$

EX 4 $E+F$ est un sous-e.v. de $\mathbb{K}^7$.

On a : $7 = \dim(\mathbb{K}^7) \geq \dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F)$
$= 8 - \dim(E \cap F)$,

d'où $\dim(E\cap F) \geq 8-7 = 1$. Ainsi $E \cap F \neq \{\bar{0}\}$

Ex 5 $f \in \mathcal{L}(V)$

(a) Supposons que $f^2 = 0$. Alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En effet :

$\bar{v} \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \bar{v} = f(\bar{u})$ pour $\bar{u} \in V$

$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(f(\bar{u})) = f^2(\bar{u}) = 0(\bar{u}) = \bar{0}$

$\Rightarrow \bar{v} \in \mathrm{Ker}(f)$

(b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(V) \to M_3(\mathbb{R})$, $h \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ est un isomorphisme

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ h) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$. Donc :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)]^2 = A^2$, et $f^2 = 0$ si on montre

que $A^2 = 0$. Ceci est vrai car

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Soit $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, d'où $f(\bar{e}_1) = -f(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et une base de

$\mathrm{Im}(f)$ est $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Soit $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors : $\bar{x} \in \mathrm{Ker}(f) \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff -x_1 + x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \text{ arbitraire} \end{cases}$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas proportionnel à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qui complète la

base $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathrm{Im}(f)$