Université Paul Verlaine – Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2009–2010
Algèbre linéaire (L2)

Examen du 11 janvier 2010
Durée : 2 heures

Questions de cours [3 points]

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la définition du rang de f. Donner la relation entre le rang de f, la dimension de E et la dimension du noyau de f.

Exercice 1. [4 points]

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degre ≤ 3 à coefficients réels et soit α un paramètre réel fixé. Soient

$$p(x) = 1 + x^2, \qquad q(x) = 2 + \alpha x + 2x^2 + \alpha x^3\,, \qquad r(x) = 1 + (1 + \alpha)x + x^2 + 2\alpha x^3$$

et soit $F = \mathrm{Vect}\{p(x), q(x), r(x)\}$.

(a) Déterminer la dimension de F en fonction de la valeur du paramètre α.

(b) Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Soit $s(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. Est-ce que $s(x) \in F$?

(c) Supposons encore que $\alpha = 1$. Trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2. [3 points]

Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $(\mathbb{R}^3)^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3. [7 points]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, -x + y, x + y + 2z)\,.$$

(a) Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le polynôme caracteristique de f. Déterminer les valeurs propres de f et leurs multeplicités algébriques.

(c) Étudier si f est diagonalisable.

(d) Si f est diagonalisable, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f.

(e) Déterminer, si possible, une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

(f) Calculer le polynôme minimal de f.

<u>Exercice 4.</u> [7 points]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ bases de E et F, respectivement. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications linéaires de matrices respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que $g \circ f$ est l'endomorphisme nul de E et que $f \circ g$ est l'endomorphisme nul de F.

(b) Déduire de (a) que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$.

(d) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et la compléter en une base de F.