Université Paul Verlaine – Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2009–2010
Algèbre linéaire (L2)

Examen du 19 juin 2010
Durée : 2 heures

Questions de cours [3 points]

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Enoncer un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la diagonalisabilité d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

2. Donner un exemple de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ mais qui est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$. Justifier votre réponse.

Exercice 1. [3 points]

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients réels. Soient

$$p(x) = 1 + x - x^2\,, \qquad q(x) = 2 - x + x^2\,, \qquad r(x) = 1 + 2x - x^2\,, \qquad t(x) = -1 - x + 2x^2\,.$$

et soient $F = \mathrm{Vect}\{p(x), q(x)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{r(x), t(x)\}$.

(a) Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel $F \cap G$.

(b) Déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel $F + G$.

Exercice 2. [4 points]

Soit $M_2(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et soit $T = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : x + w = 0\right\}$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices à trace nulle.

(a) Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer la dimension et une base de T.

(c) Trouver un supplémentaire de T dans $M_2(\mathbb{C})$.

Exercice 3. [7 points]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre réel et soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire

$$T(x, y, z) = (x + y, \alpha x + y + z, \alpha x + y + \alpha z)\,.$$

(a) Déterminer la matrice de T par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer, en fonction du paramètre α, la dimension et une base de $\mathrm{Im}\, T$.

(c) Déterminer, en fonction du paramètre α, la dimension et une base de $\mathrm{Ker}\, T$.

(d) Pour quelles valeurs du paramètre α le vecteur $\vec{v} = (0, 1, -1)$ appartient-il à $\mathrm{Im}\, T$?

(e) Supposons que $\alpha = 1$. Déterminer la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1, 2, -4), \vec{u}_1 = (0, 1, 1), \vec{u}_3 = (1, 0, -7)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. [7 points]

Soit α un paramètre réel et soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha - 3 & 2 - \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 - \alpha & \alpha & 0 & \alpha + 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles A est diagonalisable.

(b) Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Déterminer si possible une base de $\mathbb{R}^4$ formée par des vecteurs propres de A.

(c) Calculer le polynôme minimal de A.