Université Paul Verlaine – Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2009–2010
Algèbre linéaire (L2)

**Partiel du 2 novembre 2009**

Durée : 2 heures

**Questions de cours** [3 points]

**1.** Donner la définition de somme directe de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace vectoriel $E$.

**2.** Montrer que $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

**Exercice 1.** **[2 points]**

Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel réel $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

**Exercice 2.** **[6 points]**

Soit $\mathbb{C}^3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois et à coefficients complexes.

(a) Donner un isomorphisme de $\mathbb{C}^3[x]$ sur $\mathbb{C}^4$.

(b) On considère les sous-espaces vectoriels $U = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^3[x]$ où

$$u_1(x) = x + 2x^2\,, \qquad u_2(x) = x^3\,, \qquad v_1(x) = 1 + x + x^2\,, \qquad v_2(x) = 1 + 2x + 3x^2\,.$$

Déterminer la dimension des sous-espaces $U + V$ et $U \cap V$ et une base dans chacun d'eux.

**Exercice 3.** **[3 points]**

On considère les bases $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

**Exercice 4.** **[2 points]**

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient $E$ et $F$ deux sous-espaces de $\mathbb{K}^7$ tels que $\dim(E) = \dim(F) = 4$. Montrer que $E \cap F \neq \{\vec{0}\}$.

**Exercice 5.** **[5 points]**

Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et soit $f : V \to V$ un endomorphisme. On note $f^2 = f \circ f$.

(a) Supposons que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(b) Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $V$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $f^2 = 0$.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et la compléter en une base de $\mathrm{Ker}(f)$.