Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2009-2010
Fondements de l'analyse (L3)

Feuille de TD n^0 2 : Espaces topologiques, comparaison de topologies

Exercice 1 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et soit $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\big\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur X.
(b) Déterminer la famille des fermés de $(X, \mathcal{O})$.
(c) Déterminer l'adherence de $\{a, b\}$.
(d) Déterminer l'intérieur de $\{a, b, c, e\}$.
(e) Déterminer le filtre des voisinages de a.
(f) Est-ce que $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique semi-séparé ou séparé ?

Exercice 2 Soit X un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $A^{\circ\circ} = A^\circ$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
(b) si $A \subset B$, alors $A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$,
(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(e) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$
(f) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$,
(g) $\mathrm{Fr}\,(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}\,(A) \cup \mathrm{Fr}\,(B)$ et $\mathrm{Fr}\,(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}\,(A) \cup \mathrm{Fr}\,(B)$

Donner des contre-exemples aux assertions réciproques de (e), (f) et (g).

Exercice 3 (a) Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{B}$ une famille de parties de X telle que la réunion de tous les éléments de $\mathcal{B}$ est X. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur X, c-à-d la famille des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ est une topologie sur X
2) Pour tout $U, V \in \mathcal{B}$, l'ensemble $U \cap V$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
3) Pour tout $U, V \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in U \cap V$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W \subset U \cap V$.

(b) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases de deux topologies sur X. Montrer que la topologie associée à $\mathcal{B}$ est plus fine de la topologie associée à $\mathcal{B}'$ si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour tout $U' \in \mathcal{B}'$ et tout $x \in U'$ il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset U'$.

Exercice 4 La *droite achevée* est l'ensemble, noté $\overline{\mathbb{R}}$, égal à $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ où $+\infty$ et $-\infty$ sont deux éléments distincts qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : [-1, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$$f(-1) = -\infty\,, \qquad f(1) = +\infty\,, \qquad f(t) = \frac{t}{1 - |t|} \quad \text{pour } t \in]-1, 1[\,.$$

On muni $[-1, 1]$ de la topologie induite de $\mathbb{R}$ et on muni $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie finale engendrée par la fonction f.

(a) Montrer que la fonction f est un homéomorphisme par rapport à la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi définie.

(b) Montrer que $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle est un sous-espace topologique de $\overline{\mathbb{R}}$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty \leq x \leq +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre totale sur l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

On écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leq b$, on définit les intervalles d'extremités a et b comme suit :

$$[a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}, \qquad]a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\},$$
$$[a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}, \qquad]a,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}.$$

En particulier, on a $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x\}$, etc.

(e) Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'une partie U de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage de x dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est veérifiée :

1) $x \in \mathbb{R}$ et il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset U$;
2) $x = +\infty$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty] \subset U$;
3) $x = -\infty$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, a] \subset U$.

(f) Déterminer une base du filtre des voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

(g) Déterminer une base pour les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.

(h) Montrer que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(i) Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace topologique séparé.

(j) Montrer que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Exercice 5 Soient X et Y deux espaces topologiques et soient U et V deux ouverts non vides de X tels que $X = U \cup V$. Supposons que $f_U : U \to Y$ et $f_V : V \to Y$ sont deux fonctions qui sont continues par rapport aux topologies induites respectivement sur U et V par celle de X. Si $g : X \to Y$ est une fonction et $A \subset X$ est une partie non vide de X, on note $f|_A$ la restriction de f à A (donc $f|_A$ est une fonction de A dans Y).

Montrer qu'il existe une fonction continue $f : X \to Y$ telle que $f|_U = f_U$ et $f|_V = f_V$, si et seulement si $f_U|_{U\cap V} = f_V|_{U\cap V}$.

Exercice 6 Soient X un ensemble, R une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/R$ la projection canonique qui associe à tout $x \in X$ sa classe d'équivalence par rapport à R. Soit $f : X \to Z$ une fonction de X dans l'ensemble Z telle que $f(x) = f(y)$ pour tous $x, y \in X$ vérifiant xRy.

(a) Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f} : X/R \to Z$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est une application surjective si et seulement si f est surjective.

(c) Montrer que $\widetilde{f}$ est injective si et seulement si la condition $f(x) = f(y)$ entraîne xRy.

Supposons maintenant que X et Z sont deux espaces topologiques. Montrer que f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue par rapport à la topologie quotient.

Exercice 7 Soit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ l'espace topologique produit d'une famille finie d'espaces topologiques $X_1, \ldots, X_n$. Pour $j = 1, \ldots, n$, soit $p_j : X \to X_j$ la projection canonique qui associe au point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sa j-ième coordonnée x_j. Montrer que p_j est une fonction ouverte. Donner un contre-exemple pour montrer que p_j n'est pas en général fermée.