Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2009-2010
Fondements de l'analyse (L3)

Feuille de TD n^0 3 : Compacité et connexité

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle. Soit 0 le vecteur nul ; on considère la relation sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définie par : $xRy \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tel que $y = \lambda x$.

(a) Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On muni $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble quotient $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/R$ s'appelle l'espace projectif réel, noté $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. (On remarque que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.) On note $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ l'application quotient et on muni $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ de la topologie quotient.

Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $U_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq 0\}$ et $V_i = \pi(U_i)$.

(b) Montrer que V_i est un ouvert de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

(c) On pose $W_i = \{x \in U_i : x_i = 1\}$. Montrer que W_i muni de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

(d) On considère la restriction π_i de π à W_i. Montrer que $\pi_i(W_i) = V_i$ et que $\pi_i : W_i \to V_i$ est un homéomorphisme. En déduire que V_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

(e) Déduire de (d) que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est un espace topologique séparé.

On note S^{n-1} la sphère unitaire de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, où $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On muni S^{n-1} de la topologie induite de celle de $\mathbb{R}^n$.

(f) Montrer que S^{n-1} est compact.

On vérifie facilement que S^{n-1} est une partie de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On considère la restriction de π à S^{n-1}, soit $\tilde{\pi} : S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

(g) Montrer que $\tilde{\pi}$ est continue et surjective.

(h) Montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est compact.

(i) Montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1}/R' où R' est la relation d'équivalence sur S^{n-1} donnée par : $xR'y \iff y = \pm x$.

Exercice 2 (a) Soit X un espace topologique séparé et soit Y une partie compacte de X. Soit $x \in X$ tel que $x \notin Y$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V de X tels que $Y \subset U$, $x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

(b) Montrer que la propriété dans (a) n'est pas vraie si X n'est pas séparé.

(c) Soit X un espace topologique localement compact et soit $x \in X$. Montrer que pour tout voisinage U de x il existe un voisinage V de x qui est compact et tel que $V \subset U$.

Exercice 3 Soit X un espace topologique localement (quasi-)compact et soit A une partie de X.

(a) Montrer que si A est un fermé de X, alors A est localement (quasi-)compact (dans la topologie induite par celle de X).

(b) Supposons que X soit séparé. Montrer que si A est un ouvert de X, alors A est localement compact.

[*Indication :* utiliser l'exercice 2,(c)]

(c) Déduire de ce qui précède que si X est séparé et $A = U \cap F$ est l'intersection d'un ouvert U et d'un fermé F de X, alors A est localement compact.

(d) Soit X un espace topologique séparé et A un sous-espace localement compact de X. Pour une partie B de X et pour $x \in B$ on note $\mathcal{V}_x^B$ l'ensemble des voisinages de x dans B par rapport à la topologie induite de celle de X ; on écrira $\mathcal{V}_x$ à la place de $\mathcal{V}_x^X$. On veut montrer que $A = U \cap F$ où U un ouvert et F est un fermé de X.

1) Pour $x \in A$, soit $U_x \in \mathcal{V}_x^A$ un voisinage compact de x. Montrer que $U_x \in \mathcal{V}_x^{\overline{A}}$.

[*Indication :* Choisir un voisinage ouvert $V_x \in \mathcal{V}_x^A$ tel que $V_x \subset U_x$. Écrire $V_x = W_x \cap A$ où $W_x \in \mathcal{V}_x$ est un voisinage *ouvert* de x. Montrer que $W_x \cap \overline{A} \subset \overline{V_x} \subset \overline{U_x} = U_x$ et conclure.]

2) Montrer qu'il existe un ouvert U de X tel que $A = U \cap \overline{A}$.

3) Montrer pour une partie A d'un espace topologique arbitraire X que $A = U \cap F$ où U est un ouvert et F est un fermé de X, si et seulement si $A = U \cap \overline{A}$ où U est un ouvert de X.

Exercice 4 Soit K une partie (quasi-)compacte non vide d'un espace (semi-)métrique (X, d), et soit U une partie ouverte de X telle que $K \subset U$. Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

$$\{x \in X : d(x, K) < r\} \subset U,.$$

[*Indication :* Considérer la fonction $f : K \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = d(x, X \setminus U)$]

Exercice 5 Soit X un espace topologique et soit A une partie non vide, ouverte et fermée de X. Montrer que A est une réunion de composantes connexes de X.

Exercice 6 (a) Soit $S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ la sphère unitaire de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective de S^1 dans $\mathbb{R}$.

[*Indication :* montrer que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ est continue, alors f n'est pas injective, en considérant la fonction $g : S^1 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x) - f(-x)$.]

(b) Déduire de (a) que S^1 n'est pas homéomorphe à un sous-espace topologique de $\mathbb{R}$.

(c) Déduire de (b) que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.