Université Paul Verlaine – Metz | Année universitaire 2009-2010

Fondements de l'analyse (L3)

Feuille de TD n^0 4 : Espaces complets. Espaces de Banach.

Exercice 1 (a) Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X. Montrer :

1) Si (X, d) est complet et A est fermé, alors A est complète pour la distance induite.
2) Si A est complète pour la distance induite, alors A est fermé.

(b) Soient

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ est continue}\}$$

et

$$B([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ est bornée}\}.$$

1) Montrer que $C([0,1]) \subset B([0,1])$.
2) Montrer que $C([0,1])$ est fermé dans $B([0,1])$.
3) En déduire que $C([0,1])$ est un espace de Banach par rapport à la norme uniforme $\|f\|_u = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

(c) Pour $f \in C([0,1])$ on définit $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $C([0,1])$.
2) Montrer que $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

[*Indication :* on pourra considérer la suite de fonctions lináires par morceaux (f_n), avec $n \geq 2$, donnée par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$.]