Université Paul Verlaine – Metz Année universitaire 2009-2010
Fondaments de l'Analyse (L3)

Partiel du 17 novembre 2009
Durée : 2 heures

Questions de cours (2 points) :

1. Donner la définition de l'intérieur A° et de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un espace topologique X.

2. Montrer que $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Exercice 1 (3 points).

Soit (X, d) un espace (semi-)métrique. Par la suite $A, C \subset X$ dénotent deux parties non vides de X et z est un élément de X. On pose

$$\begin{aligned} d(A,C) &:= \inf\{d(x,y) : x \in A,\, y \in C\}\,, \\ d(z,A) &:= \inf\{d(z,y) : y \in A\}\,. \end{aligned}$$

Pour $r \geq 0$, le voisinage fermé de C de rayon r est défini par $B_f(C,r) := \{x \in X : d(C,x) \leq r\}$.

1. Montrer que $d(A, B_f(C,r)) \geq d(A,C) - r$.

2. Déduire de 1. que $d(A,C) \leq d(z,A) + d(z,C)$.

Exercice 2 (7 points).

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour toute partie A de X, on pose $\alpha(A) := (\overline{A})^\circ$ et $\beta(A) := \overline{(A^\circ)}$.

1. Soient A et B deux parties de X. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\alpha(A) \subseteq \alpha(B)$ et $\beta(A) \subseteq \beta(B)$.

2. Montrer que si A est un ouvert (resp. fermé) de X, alors $A \subseteq \alpha(A)$ (resp. $\beta(A) \subseteq A$).

3. Soit A une partie de X. Montrer que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

4. Dans cette question, on suppose que $X = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{T}$ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Pour les parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer A°, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ en justifiant votre réponse :

a. $A = \mathbb{Z}$; **b.** $A = \mathbb{Q}$; **c.** $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$; **d.** $A = [a, b[$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$).

Exercice 3 (4 points).

Soit $\mathcal{T}$ la famille de parties de $\mathbb{R}$ définie par $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R} |\ \mathbb{R} \backslash A \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

3. Démontrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire l'adhérence de A relativement à la topologie $\mathcal{T}$ est $\mathbb{R}$).

4. En déduire que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé et que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable

Exercice 4 (6 points).

Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques et f une application de $(X, \mathcal{O})$ vers $(Y, \mathcal{T})$. On dit que f est une application ouverte (resp. fermée) si pour tout ouvert U (resp. fermé F) de X, $f(U)$ (resp. $f(F)$) est un ouvert (resp. fermé) de Y.

1. Montrer que f est une application ouverte si et seulement si $\forall\, A \subseteq X,\ f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

2. Montrer que f est une application fermée si et seulement si $\forall\, A \subseteq X,\ \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

3. On suppose maintenant que $X = Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{T}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

3.1. Montrer que l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par: $f(x) := x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, n'est pas ouverte.

3.2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par: $f(x) := 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est continue, fermée et non ouverte.

4. On suppose dans cette question que $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}$ est la topologie grossière et $\mathcal{T}$ est la topologie discrète sur $\mathbb{R}$. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ l'application définie par:

$$f(x) := -1,\ \forall x \in]-\infty, 0[;\ \ f(0) = 0;\ \ f(x) := 1,\ \forall x \in]0, +\infty[.$$

Montrer que f est ouverte, fermée et non continue.